

横向荷载下弹性桩的内力和位移分析

何伟

湖南省公路设计有限公司

摘要: 本文根据文克尔 (Winker) 弹性地基梁法及“m”法下的桩基挠曲基本微分方程, 推导了单层土中桩身位移及内力的解析解计算公式, 以及多层土中的桩身位移及内力的解析解计算公式。对多层土中, 通过算例, 对按本文公式计算与按规范折算成单一土层的m值计算的位移和内力进行了比对。文中公式可供相关专业人员编制excel表格或编制计算机程序用于计算桩身位移和内力。

关键词: 弹性桩; “m”法; 多层土; 单层土; 幂级数解

一、引言

桩基础是我国桥梁建设中应用最为广泛的一种基础形式, 在桩基的设计过程中, 除了要考虑在竖向荷载下桩基的竖向承载能力, 还需要考虑横向荷载 (包括汽车制动力、温度力、土侧压力、风荷载及地震作用等) 作用下, 桩基的抗弯、抗剪承载能力, 为此我们需要分析桩基在横向荷载下的作用效应。

事实上, 相关教材及规范中已给出了基本计算原理, 并编制了详细的计算表格供设计人员查算, 但并未给出表格参数的计算公式, 本着加深对教材规范的理解, 本文根据文克尔 (Winker) 弹性地基梁法及“m”法假定, 对单层土中桩的内力和位移计算进行了详细的推导, 并将公式推广至多层土的计算中。

二、单层土中桩的内力和位移分析

横向荷载作用下桩身内力与位移计算, 采用文克尔 (Winker) 弹性地基梁法及“m”法。

在公式推导及计算过程中, 取图1所示的坐标系, 各变量的号规定如下: 横向力H指向x轴正向时为正, 弯矩M使桩身左侧纤维受拉时为正, 横向位移x移向x轴正向时为正, 桩身截面转角φ逆时针转动时为正。

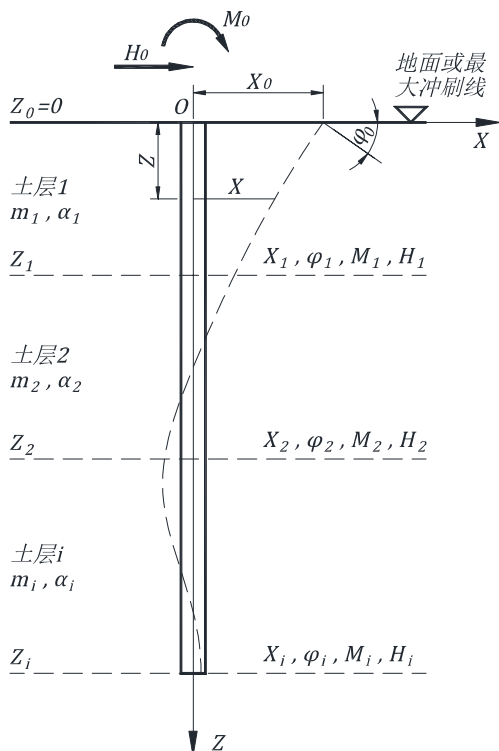


图1 基桩分析图式

根据材料力学原理, 在小变形假定及平截面假定下, 单一土层中, 桩基的挠曲线微分方程为:

$$\frac{d^4x}{dz^4} + \alpha^2 x = 0 \tag{01}$$

式 (01) 中 $\alpha = \sqrt{\frac{mb}{EI}}$ 为桩的变形系数, EI 为桩的抗弯刚度, b

为桩的计算宽度, m 为地基水平抗力系数的比例系数。

式 (01) 是四阶、线性、变系数、齐次微分方程微分方程, 可以用幂级数解法近似求解。求解时, 需利用桩顶边界条件, 即 $z = 0$ 时, $x = x_0$ 、 $\varphi = \varphi_0$ 、 $M = M_0$ 和 $H = H_0$ 。

令桩身水平位移函数 $x(z)$ 在 $z = 0$ 处的幂级数展开表达式为:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{02}$$

式 (02) 中 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 为待定系数。

由材料力学知:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = a_0 \\ \varphi_0 = \dot{x}(0) = a_1 \\ \frac{M_0}{EI} = \ddot{x}(0) = 2a_2 \\ \frac{H_0}{EI} = \ddot{\dot{x}}(0) = 6a_3 \end{cases} \tag{03}$$

将式 (2) 带入式 (1) 中得 $a_4 = 0$, 且有以下递推关系式:

$$a_{n+5} = \frac{-\alpha^5}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} a_n \tag{04}$$

由式 (02)、(03)、(04) 求得:

$$x(z) = x_0 A_{11}(\alpha z) + \frac{\varphi_0}{\alpha} A_{12}(\alpha z) + \frac{M_0}{\alpha^2 EI} A_{13}(\alpha z) + \frac{H_0}{\alpha^3 EI} A_{14}(\alpha z) \tag{05}$$

对 $x(z)$ 求导可得:

$$\frac{\varphi(z)}{\alpha} = x_0 A_{21}(\alpha z) + \frac{\varphi_0}{\alpha} A_{22}(\alpha z) + \frac{M_0}{\alpha^2 EI} A_{23}(\alpha z) + \frac{H_0}{\alpha^3 EI} A_{24}(\alpha z) \tag{06}$$

$$\frac{M(z)}{\alpha^2 EI} = x_0 A_{31}(\alpha z) + \frac{\varphi_0}{\alpha} A_{32}(\alpha z) + \frac{M_0}{\alpha^2 EI} A_{33}(\alpha z) + \frac{H_0}{\alpha^3 EI} A_{34}(\alpha z) \tag{07}$$

$$\frac{H(z)}{\alpha^3 EI} = x_0 A_{41}(\alpha z) + \frac{\varphi_0}{\alpha} A_{42}(\alpha z) + \frac{M_0}{\alpha^2 EI} A_{43}(\alpha z) + \frac{H_0}{\alpha^3 EI} A_{44}(\alpha z) \tag{08}$$

式 (05) ~ (08) 中 $A_{11}(\alpha z) \sim A_{44}(\alpha z)$ 十六个系数为计算截面坐标 z 的函数, 称为影响函数, 可根据换算深度 αz (无量纲) 计算。

$A_{11}(\alpha z) \sim A_{14}(\alpha z)$ 的表达式, 可根据式 (03)、式 (4) 求得, $A_{21}(\alpha z) \sim A_{44}(\alpha z)$ 的表达式, 可对 $A_{11}(\alpha z) \sim A_{14}(\alpha z)$ 求得得出:

$$A_{2k}(\alpha z) = \frac{\dot{A}_{1k}(\alpha z)}{\alpha}, A_{3k}(\alpha z) = \frac{\ddot{A}_{1k}(\alpha z)}{\alpha^2}, A_{4k}(\alpha z) = \frac{\ddot{\dot{A}}_{1k}(\alpha z)}{\alpha^3}, (k = 1, 2, 3, 4)$$

具体表达式如下:

表1-1 $A_{11}(\alpha z) \sim A_{14}(\alpha z)$ 计算表达式

$A_{11}(\alpha z)$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-4)}{(5n)!} (\alpha z)^{5n}$
$A_{12}(\alpha z)$	$\alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-3)}{(5n+1)!} (\alpha z)^{5n+1}$
$A_{13}(\alpha z)$	$\frac{(\alpha z)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-2)}{(5n+2)!} (\alpha z)^{5n+2}$
$A_{14}(\alpha z)$	$\frac{(\alpha z)^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-1)}{(5n+3)!} (\alpha z)^{5n+3}$

表1-2 $A_{21}(\alpha z) \sim A_{24}(\alpha z)$ 计算表达式

$A_{21}(\alpha z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-4)}{(5n-1)!} (\alpha z)^{5n-1}$
$A_{22}(\alpha z)$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-3)}{(5n)!} (\alpha z)^{5n}$
$A_{23}(\alpha z)$	$\alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-2)}{(5n+1)!} (\alpha z)^{5n+1}$
$A_{24}(\alpha z)$	$\frac{(\alpha z)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-1)}{(5n+2)!} (\alpha z)^{5n+2}$

表1-3 $A_{31}(\alpha z) \sim A_{34}(\alpha z)$ 计算表达式

$A_{31}(\alpha z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-4)}{(5n-2)!} (\alpha z)^{5n-2}$
$A_{32}(\alpha z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-3)}{(5n-1)!} (\alpha z)^{5n-1}$
$A_{33}(\alpha z)$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-2)}{(5n)!} (\alpha z)^{5n}$
$A_{34}(\alpha z)$	$\alpha z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-1)}{(5n+1)!} (\alpha z)^{5n+1}$

表1-4 $A_{41}(\alpha z) \sim A_{44}(\alpha z)$ 计算表达式

$A_{41}(\alpha z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-4)}{(5n-3)!} (\alpha z)^{5n-3}$
$A_{42}(\alpha z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-3)}{(5n-2)!} (\alpha z)^{5n-2}$
$A_{43}(\alpha z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-2)}{(5n-1)!} (\alpha z)^{5n-1}$
$A_{44}(\alpha z)$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \prod_{k=1}^n (5k-1)}{(5n)!} (\alpha z)^{5n}$

将式(5)~(8)式写成矩阵形式:

$$\mathbf{X}(\alpha, z) = \mathbf{A}(\alpha z) \mathbf{X}(\alpha, 0) \quad (9)$$

上式中:

$\mathbf{X}(\alpha, 0) = (x_0, \frac{\varphi_0}{\alpha}, \frac{M_0}{\alpha^2 EI}, \frac{H_0}{\alpha^3 EI})^T$ 称为桩顶 $z=0$ 处桩身的位移与内

力向量, 单位为m;

$\mathbf{X}(\alpha, z) = (x(z), \frac{\varphi(z)}{\alpha}, \frac{M(z)}{\alpha^2 EI}, \frac{H(z)}{\alpha^3 EI})^T$ 为深度 z 处桩身的位移与内力

向量;

$\mathbf{A}(\alpha z)$ 为深度 z 处16个影响函数组成的 4×4 阶方阵函数, 其表达式如下, 为简化书写, 下式中代 \mathbf{A} 表示 $\mathbf{A}(\alpha z)$, A_{ij} 表示 $A_{ij}(\alpha z)$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{A}(\alpha z)$ 的逆矩阵为:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{44} & -A_{34} & A_{24} & -A_{14} \\ -A_{43} & A_{33} & -A_{23} & A_{13} \\ A_{42} & -A_{32} & A_{22} & -A_{12} \\ -A_{41} & A_{31} & -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \quad (11)$$

实际工程中桩顶荷载 M_0 和 H_0 是已知的, 桩顶位移 x_0 和 φ_0 是未知的, 根据桩底的边界条件确定。

设桩长为 l , 桩底的位移和内力向量表示为 $\mathbf{X}(\alpha, l)$

$= (x_l, \frac{\varphi_l}{\alpha}, \frac{M_l}{\alpha^2 EI}, \frac{H_l}{\alpha^3 EI})^T$, 根据不同的边界条件确定取值, 详见

下表:

表2 桩底边界条件

边界	x_l	φ_l	M_l	H_l
自由	x_l	φ_l	0	0
考虑桩底弯矩	x_l	φ_l	$-C_0 l \varphi_l$	0
嵌固	0	0	M_l	H_l

将边界条件带入式(9)即可解四元一次方程, 求得桩顶位移 x_0 和 φ_0 , 经计算可得:

$$\mathbf{X}(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \delta_{Mx} & \delta_{Hx} \\ \delta_{M\varphi} & \delta_{H\varphi} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{M_0}{\alpha^2 EI} \\ \frac{H_0}{\alpha^3 EI} \end{pmatrix} \quad (12)$$

式(12)中 δ_{Mx} , δ_{Hx} , $\delta_{M\varphi}$, $\delta_{H\varphi}$ 是 αl 的函数, 且与边界条件有关, 将式(12)带入式(9), 即可求得深度 z 处桩身的位移与内力向量 $\mathbf{X}(\alpha, z)$ 。

计算表明, 当桩长 l 满足 $\alpha l \geq 4$ 时, 无论按自由、考虑桩底弯矩或嵌固等边界条件计算得出的 δ_{Mx} , δ_{Hx} , $\delta_{M\varphi}$, $\delta_{H\varphi}$ 都分别趋于同一数值, 即: $\delta_{Mx} \approx 1.6194$, $\delta_{Hx} \approx 2.4292$, $\delta_{M\varphi} \approx -1.7468$, $\delta_{H\varphi} \approx -1.6194$ 。故当 $\alpha l \geq 4$ 时, 可直接将以上数值带入式(12)中求得 x_0 和 φ_0 。

至此, 单层土中桩的内力和位移分析已经完成, 下面根据以上分析结果推广至多层土中。

三、多层土中桩的内力和位移分析

如图1所示, 在多层土中, 设土层 i 的层底标高为 z_i , 地基水平抗力系数的比例系数为 m_i , 相应的桩基变形系数为 α_i 。

土层 $(i-1)$ 的层底深度 z_{i-1} 处的桩身的位移与内力向量, 在土层 $(i-1)$ 中为 $\mathbf{X}(\alpha_{i-1}, z_{i-1})$, 在土层 i 中为 $\mathbf{X}(\alpha_i, z_{i-1})$ 。则:

$$\mathbf{X}(\alpha_i, z_{i-1}) = \mathbf{K}_{i-1} \mathbf{X}(\alpha_{i-1}, z_{i-1}) \quad (13)$$

上式中:

$$\mathbf{K}_{i-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} & & \\ & & (\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})^2 & \\ & & & (\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})^3 \end{pmatrix}$$

根据式(9)可知, 同一土层中深度 z 处 $\mathbf{X}(\alpha, z)$ 与深度 z' 处 $\mathbf{X}(\alpha, z')$ 满足以下关系式:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\alpha, 0) &= \mathbf{A}^{-1}(\alpha z) \mathbf{X}(\alpha, z) \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\alpha z') \mathbf{X}(\alpha, z') \end{aligned}$$

即:

$$\mathbf{X}(\alpha, z') = \mathbf{A}(\alpha z') \mathbf{A}^{-1}(\alpha z) \mathbf{X}(\alpha, z) \quad (14)$$

由式(14)可知, 土层 i 中深度 $z(z_{i-1} \leq z \leq z_i)$ 处的桩身的位

移与内力向量 $X(\alpha_i, z)$ 可由本土层层顶深度 z_{i-1} 处的桩身的位移与内力向量 $X(\alpha_i, z_{i-1})$ 求得:

$$X(\alpha_i, z) = A(\alpha_i, z)A^{-1}(\alpha_i, z_{i-1})X(\alpha_i, z_{i-1}) \quad (15)$$

将式 (13) 代入式 (15) 中即得:

$$X(\alpha_i, z) = A(\alpha_i, z)A^{-1}(\alpha_i, z_{i-1})K_{i-1}X(\alpha_{i-1}, z_{i-1}) \quad (16)$$

根据式 (16) 递推可得:

$$X(\alpha_i, z) = A(\alpha_i, z) \left(\prod_{j=i-1}^1 A^{-1}(\alpha_{j+1}, z_j) K_j A(\alpha_j, z_j) \right) X(\alpha_1, 0) \quad (17)$$

若已知桩顶的位移和内力向量 $X(\alpha_1, 0)$, 根据式 (17) 可求得多层土中任意深度 z 处的桩身的位移与内力向量 $X(\alpha_i, z)$ 。

$X(\alpha_1, 0)$ 可根据桩底边界条件求得, 假设桩底位于土层 i 中, 桩底深度为 z_i , 对桩底的位移与内力向量 $X(\alpha_i, z_i)$ 运用表 2 中的边界条件, 并代入式 (17) 中, 即可解四元一次方程, 求得桩顶位移 X_0 和 φ_0 。

四、算例

对桩基侧面为多层土时, 按本文中的公式 (方法 1) 计算桩基在横向荷载下的位移和内力, 同时按相关规范中“等面积法”折算为单一 m 值的方法 (方法 2) 进行计算, 并对两种方法的计算结果进行对比分析。

本例中, 桩径为 1.5m, 计算宽度为 2.25m, 桩身刚度 $EI = 5.92 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, 桩顶的横向力 $M_0 = 0$, $H_0 = 500 \text{ kN}$, 桩端边界条件为自由, 土层数为 3 层, 土层参数如下表所示。

表 3 土层参数

土层号	层厚 (m)	m (kN/m^4)	α (m^{-1})
1	2	10000	0.32807
2	5	30000	0.40869
3	8	50000	0.45265

采用“等面积法”折算时, 应将地面或局部冲刷线以下 $h_m = 2(d+1)$ 深度内各层土的地基系数按“等面积法”换算成一个 m 值, 作为整个深度的 m 值, d 为桩的成桩直径。本例中折算后的 m 值为 $26800 \text{ kN}/\text{m}^4$, 相应的 α 为 0.39958 m^{-1} 。

经计算, 两种方法求得的桩身最大位移和内力如下表所示。

表 4 桩身最大位移和内力

计算方法	x (mm)	(rad)	M ($\text{kN} \cdot \text{m}$)	H (kN)
方法 1	3.94	-1.022E-03	1186.8	500
方法 2	3.22	-8.568E-04	965.5	500

由上表可知, 采用两种方法的计算结果是有一定的差别的, 方法 1 为理论上的解析解。

两种方法计算的桩身位移及内力结果如下图所示。

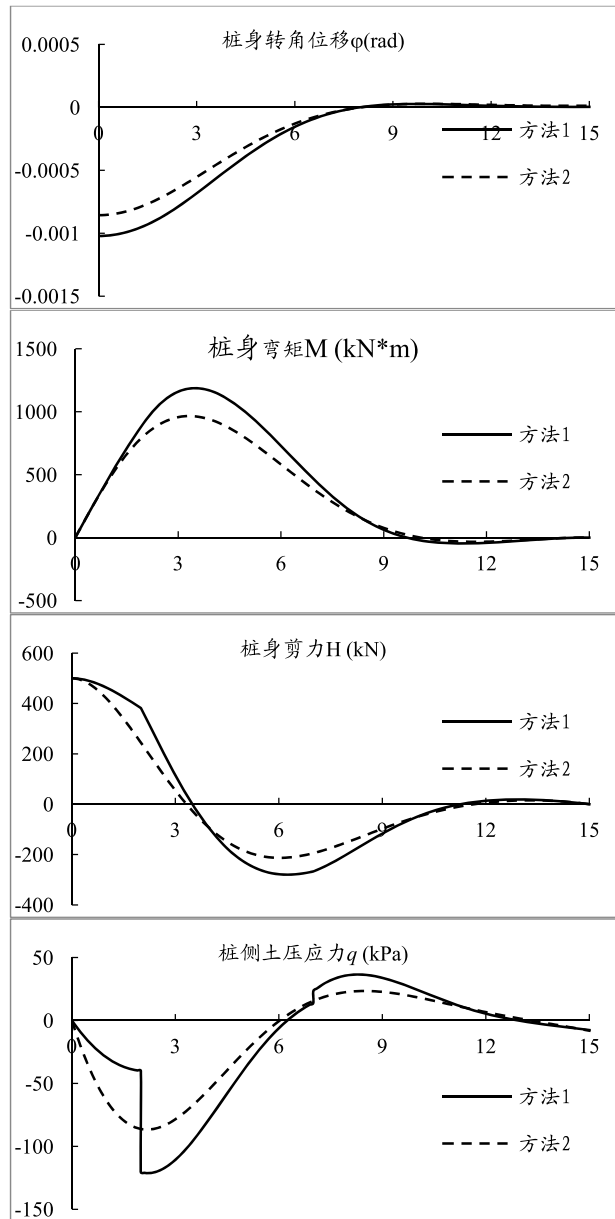
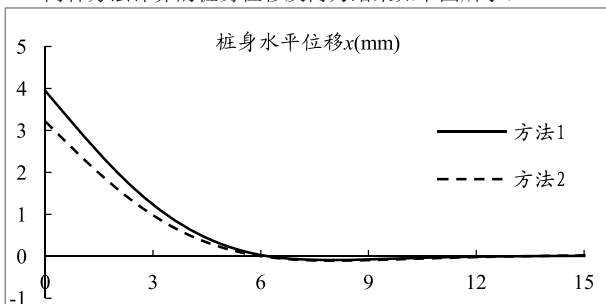


图 2 桩身位移及内力图表

五、结语

1、本文根据文克尔 (Winkler) 弹性地基梁法及“ m ”法假定下的桩基挠曲基本微分方程, 详细推导了单层土中桩身位移及内力计算公式, 并给出了各参数的幂级数解析解, 且与规范是一致的; 同时将计算公式推广至多层土中, 给出了多层土中解析解公式, 可方便相关专业人员编制 excel 表格或编制计算机程序计算桩身位移和内力。

2、本文通过算例, 对比了多层土中, 按本文计算公式求解及按规范要求求解的结果上的差异, 考虑到实际工程中, 土体的复杂性, 及“ m ”法假设的局限性, 计算结果还有待工程实践的检验。

参考文献

- [1] 李亮, 魏丽敏. 基础工程. 长沙: 中南大学出版社, 2005. 2.
- [2] 公路桥涵地基与基础设计规范. JTG D63-2007. 北京: 人民交通出版社, 2007. 11.