

公路路线中桩坐标的计算

李强

通化县公路管理段

摘要: 公路建设施工过程中, 测量人员可以依据设计文件中路线部分的直曲表、逐桩坐标表, 实现平面线形的施工放样, 而这些成果一般都采用设计软件来完成。施工中, 对某些临时需求、特殊需要的中桩点位的坐标, 在设计文件中可能没有提供, 测量人员在没有相应软件的支持下, 就需要自己掌握中桩坐标的计算方法, 来计算路线中桩坐标。

关键词: 公路; 曲线; 中桩坐标; 计算

【DOI】 10.12254/j.issn.2096-6539.2024.03.060

一、交点间导线的方位角、距离、坐标的关系

公路设计文件直曲表中的交点坐标、交点间距、计算方位角是中桩坐标计算时必要的基础数据, 掌握它们之间的逻辑关系, 是公路测量人员必须的基本技能之一。

1. 方位角 α 计算

JD_i 到 JD_{i+1} 之间, 坐标的变化值、方位角的关系计算如下:

$$\begin{cases} \Delta y = y_{i+1} - y_i \\ \Delta x = x_{i+1} - x_i \\ \beta = \tan^{-1} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \end{cases}$$

JD_i 到 JD_{i+1} 的方位角 α_i :

- 当 $\Delta y = 0, \Delta x > 0$ 时, $\alpha_i = 0^\circ$ (坐标X轴正向)
- 当 $\Delta y > 0, \Delta x > 0$ 时, $\alpha_i = \beta$ (第一象限)
- 当 $\Delta y > 0, \Delta x = 0$ 时, $\alpha_i = 90^\circ$ (坐标Y轴正向)
- 当 $\Delta y > 0, \Delta x < 0$ 时, $\alpha_i = 180^\circ - \beta$ (第二象限)
- 当 $\Delta y = 0, \Delta x < 0$ 时, $\alpha_i = 180^\circ$ (坐标X轴反向)
- 当 $\Delta y < 0, \Delta x < 0$ 时, $\alpha_i = 180^\circ + \beta$ (第三象限)
- 当 $\Delta y < 0, \Delta x = 0$ 时, $\alpha_i = 270^\circ$ (坐标Y轴正向)
- 当 $\Delta y < 0, \Delta x > 0$ 时, $\alpha_i = 360^\circ - \beta$ (第四象限)

2. JD_i 到 JD_{i+1} 的交点间距 D_i

$$D_i = \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

3. JD_i 和 JD_{i+1} 坐标关系

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + D_i \cos \alpha_i \\ Y_{i+1} = Y_i + D_i \sin \alpha_i \end{cases}$$

路线的起算(起点)坐标数据一般由公路外业测量时, 与三角点联测得来, 或使用卫星定位系统(如RTK)测量得来, 不再赘述。

二、坐标系转换

公路平面线形都是由直线、圆曲线、缓和曲线(回

旋线)构成的, 三要素都有自己数学模型, 在各自的独立坐标中都有相应的计算方式, 公路中线中桩的坐标就是把每一个线元自身的坐标通过旋转、平移, 径向衔接起来得到的。

坐标平移:

坐标系XY坐标原点在坐标系xy内的坐标为(m, n), M点在XY坐标(X, Y)与M点在xy内的坐标(x, y)的关系为:

$$\begin{cases} x = X + m \\ y = Y + n \end{cases}$$

坐标旋转:

坐标系XY旋转 θ 得到坐标系xy, M点在XY坐标(X, Y)与M点在xy内的坐标(x, y)的关系为:

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$$

坐标旋转加平移:

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta + m \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta + n \end{cases}$$

三、直线段中桩坐标计算

直线是平面线形三要素中最简单的要素, 绝大部分直线段都夹在上一段曲线结束点YZ(或HZ)点到下一段曲线起始点ZY(或ZH)点之间, 这段直线段上中桩的坐标计算方法是利用曲线交点坐标、交点间导线段方位角、计算点到交点距离等数据进行计算。

如直线上点P位于 JD_i 与 JD_{i+1} 之间, P点到 JD_i 曲止点的长度为l, 到 JD_{i+1} 曲起点的长度为l', JD_i 方位角 α_i , JD_i 处切线长 T_i , JD_{i+1} 处切线长 T_{i+1} 。

P点坐标:

由 JD_i 到 JD_{i+1} 方向计算:

$$\begin{cases} x = X_i + (T_i + l) \cos \alpha_i \\ y = Y_i + (T_i + l) \sin \alpha_i \end{cases}$$

由 JD_{i+1} 到 JD_i 方向计算:

$$\begin{cases} x = X_{i+1} - (T_{i+1} + l') \cos \alpha_i \\ y = Y_{i+1} - (T_{i+1} + l') \sin \alpha_i \end{cases}$$

P点所在直线方位角: α_i

四、不设缓和曲线的圆曲线中桩坐标计算

1. 直圆点(ZY)、圆直点(YZ)坐标

交点JD_i的坐标 (X_i, Y_i)，前导线的方位角 α_{i-1}，后导线的方位角 α_i，曲线切线长T，

直圆点 (ZY) 坐标：

$$\begin{cases} X_{ZY} = X_i - T \cos \alpha_{i-1} \\ Y_{ZY} = Y_i - T \sin \alpha_{i-1} \end{cases}$$

切线方位角：α_{i-1}

圆直点 (YZ) 坐标：

$$\begin{cases} X_{YZ} = X_i + T \cos \alpha_i \\ Y_{YZ} = Y_i + T \sin \alpha_i \end{cases}$$

切线方位角：α_i

2. 直圆点 (ZY) 到圆直点 (YZ) 间中桩坐标

建立起以直圆点ZY (圆直点YZ) 为坐标原点，切线方向为X' 轴，法线为Y' 轴的临时直角坐标系 (图4-2)，在曲线上任一点的P到ZY (YZ) 的弧长为l'，则有中桩点P在X' Y' 临时坐标系内的坐标为：

$$\begin{cases} x' = R \sin \left(\frac{l'}{R} \times \frac{180}{\pi} \right) \\ y' = R - R \cos \left(\frac{l'}{R} \times \frac{180}{\pi} \right) \end{cases}$$

中桩点P处的切线与X' 轴夹角

$$\varphi = \frac{l'}{R} \times \frac{180}{\pi}$$

角 φ 就是圆弧上动点P从ZY (YZ) 点沿圆弧移动时转过的角度，当P点移动到YZ (ZY) 点时，角 φ 就等于曲线的偏角。角 φ 可用于计算P点处的方位角。

将X' Y' 临时坐标系旋转、平移，完成坐标系转换后就可以得出中桩点坐标。

●从ZY点向YZ点计算：

$$\text{曲线右偏时: } \begin{cases} x = X_{ZYi} + x' \cos \alpha_{i-1} - y' \sin \alpha_{i-1} \\ y = Y_{ZYi} + x' \sin \alpha_{i-1} + y' \cos \alpha_{i-1} \end{cases}$$

P点切线方位角：α = α_{i-1} + φ

$$\text{曲线左偏时: } \begin{cases} x = X_{ZYi} + x' \cos \alpha_{i-1} + y' \sin \alpha_{i-1} \\ y = Y_{ZYi} + x' \sin \alpha_{i-1} - y' \cos \alpha_{i-1} \end{cases}$$

P点切线方位角：α = α_{i-1} - φ

●从YZ点向ZY点计算：

$$\text{曲线右偏时: } \begin{cases} x = X_{YZi} - x' \cos \alpha_i - y' \sin \alpha_i \\ y = Y_{YZi} - x' \sin \alpha_i + y' \cos \alpha_i \end{cases}$$

P点切线方位角：α = α_i - φ

$$\text{曲线左偏时: } \begin{cases} x = X_{YZi} - x' \cos \alpha_i + y' \sin \alpha_i \\ y = Y_{YZi} - x' \sin \alpha_i - y' \cos \alpha_i \end{cases}$$

P点切线方位角：α = α_i + φ

五、设缓和曲线的单圆曲线中桩坐标计算 (基本型)

1. 直缓点 (ZH)、缓直点 (HZ) 坐标

与未设缓和曲线的单圆曲线曲起点、曲止点坐标计算类似，交点JD_i的坐标 (X_i, Y_i)，前导线方位角 α_{i-1}，后导线方位角 α_i，圆曲线切线长T_H。

ZH点坐标：

$$\begin{cases} X_{ZH} = X_i - T_H \cos \alpha_{i-1} \\ Y_{ZH} = Y_i - T_H \sin \alpha_{i-1} \end{cases}$$

切线方位角：α_{i-1}

HZ点坐标：

$$\begin{cases} X_{HZ} = X_i + T_H \cos \alpha_i \\ Y_{HZ} = Y_i + T_H \sin \alpha_i \end{cases}$$

切线方位角：α_i

2. 第一缓和曲线，直缓点 (ZH) 到缓圆点 (HY) 中桩坐标

从直缓点 (ZH) 向缓圆点 (HY) 方向计算，建立起以直缓点 (ZH) 为坐标原点，切线方向为X' 轴，法线为Y' 轴的临时直角坐标系。动点P到缓和曲线起点 (ZH) 的弧长l，圆曲线半径R，缓和曲线总长为L_c，则有中桩点P在X' Y' 临时坐标系内的坐标为：

$$\begin{cases} x' = l - \frac{l^5}{40R^2L_c^2} \\ y' = \frac{l^3}{6RL_c} - \frac{l^7}{336R^3L_c^3} \end{cases}$$

中桩点P处的切线与X' 轴夹角

$$\varphi = \left(\frac{l^2}{2L_cR} \times \frac{180}{\pi} \right)$$

将临时坐标系旋转、平移，完成坐标系转换后就可以得出中桩点坐标。

$$\text{曲线右偏时: } \begin{cases} x = X_{ZHi} + x' \cos \alpha_{i-1} - y' \sin \alpha_{i-1} \\ y = Y_{ZHi} + x' \sin \alpha_{i-1} + y' \cos \alpha_{i-1} \end{cases}$$

P点切线方位角：α = α_{i-1} + φ

$$\text{曲线左偏时: } \begin{cases} x = X_{ZHi} + x' \cos \alpha_{i-1} + y' \sin \alpha_{i-1} \\ y = Y_{ZHi} + x' \sin \alpha_{i-1} - y' \cos \alpha_{i-1} \end{cases}$$

P点切线方位角：α = α_{i-1} - φ

3. 第二缓和曲线，圆缓点 (YH) 到缓直点 (HZ) 中桩坐标

从缓直点 (HZ) 向圆缓点 (YH) 方向计算, 建立起以缓直点 (HZ) 为坐标原点, 切线方向为 X' 轴, 法线为 Y' 轴的临时直角坐标系, 临时坐标计算同第一缓和曲线。将临时坐标系旋转、平移, 完成坐标系转换后就可以得出中桩点坐标。

$$\text{曲线右偏时: } \begin{cases} x = X_{HZi} - x' \cos \alpha_i - y' \sin \alpha_i \\ y = Y_{HZi} - x' \sin \alpha_i + y' \cos \alpha_i \end{cases}$$

P点切线方位角: $\alpha = \alpha_i - \varphi$

$$\text{曲线左偏时: } \begin{cases} x = X_{HZi} - x' \cos \alpha_i + y' \sin \alpha_i \\ y = Y_{HZi} - x' \sin \alpha_i - y' \cos \alpha_i \end{cases}$$

P点切线方位角: $\alpha = \alpha_i + \varphi$

4. 圆曲线段, 缓圆点 (HY) 到圆缓点 (YH) 中桩坐标

从缓圆点 (HY) 到圆缓点 (YH) 方向计算 (正算), 建立起以直缓点 (ZH) 为坐标原点, 切线方向为 X' 轴, 法线为 Y' 轴的临时直角坐标系, 弧长 l 长为动点 P 到直缓点 (ZH) 的弧长。

从圆缓点 (YH) 到缓圆点 (HY) 方向计算 (反算), 建立起以缓直点 (HZ) 为坐标原点, 切线方向为 X' 轴, 法线为 Y' 轴的临时直角坐标系, 弧长 l 长为动点 P 到缓直点 (HZ) 的弧长。

圆曲线半径 R , 缓和曲线角 (切线角) β , 圆曲线内移值 p , 切线增长值 (切移距) q , 则有中桩点 P 在 $X' Y'$ 临时坐标系内的坐标为:

$$\begin{cases} x' = R \sin \left(\frac{l}{R} \times \frac{180}{\pi} + \beta \right) + q \\ y' = R - R \cos \left(\frac{l}{R} \times \frac{180}{\pi} + \beta \right) + p \end{cases}$$

中桩点 P 处的切线与 X' 轴夹角

$$\varphi = \frac{l}{R} \times \frac{180}{\pi} + \beta$$

将临时坐标系旋转、平移, 完成坐标系转换后就可以得出中桩点坐标。

●从缓圆点 (HY) 到圆缓点 (YH) 方向计算 (正算)

$$\text{曲线右偏时: } \begin{cases} x = X_{ZH} + x' \cos \alpha_{i-1} - y' \sin \alpha_{i-1} \\ y = Y_{ZH} + x' \sin \alpha_{i-1} + y' \cos \alpha_{i-1} \end{cases}$$

P点切线方位角: $\alpha = \alpha_{i-1} + \varphi$

$$\text{曲线左偏时: } \begin{cases} x = X_{ZH} + x' \cos \alpha_{i-1} + y' \sin \alpha_{i-1} \\ y = Y_{ZH} + x' \sin \alpha_{i-1} - y' \cos \alpha_{i-1} \end{cases}$$

P点切线方位角: $\alpha = \alpha_{i-1} - \varphi$

●从圆缓点 (YH) 到缓圆点 (HY) 方向计算 (反算)

$$\text{曲线右偏时: } \begin{cases} x = X_{HZi} - x' \cos \alpha_i - y' \sin \alpha_i \\ y = Y_{HZi} - x' \sin \alpha_i + y' \cos \alpha_i \end{cases}$$

P点切线方位角: $\alpha = \alpha_i - \varphi$

$$\text{曲线左偏时: } \begin{cases} x = X_{HZi} - x' \cos \alpha_i + y' \sin \alpha_i \\ y = Y_{HZi} - x' \sin \alpha_i - y' \cos \alpha_i \end{cases}$$

P点切线方位角: $\alpha = \alpha_i + \varphi$

圆曲线部分计算还可以以缓圆点 (HY) 为原点, 缓圆点切线方向 X' 轴, 法线为 Y' 轴的临时直角坐标系为建立临时直角坐标系, 临时坐标系转换时, 采用缓圆点 (HY) 坐标和切线方位角计算。

六、平面线形其他组合形式

前述为基本型平曲线中桩坐标的计算, 具体实际情况还会出现复曲线、S形、C形、凸形、复合型等组合形式。

复曲线的主曲线与副曲线 ($R_{主}$, $R_{副}$) 直接衔接的, 计算时以衔接点 (公切点) 为界, 将曲线分开分别计算。

卵形复曲线的主曲线与副曲线 (R_1 , R_2) 用一段缓和曲线衔接的组合方式称为卵形复曲线 (直线-缓和曲线 A_1 -圆曲线 R_1 -缓和曲线 $B_{卵}$ -圆曲线 R_2 -缓和曲线 A_2 -直线)。由于中间缓和曲线并非完整的缓和曲线, 而是取缓和曲线末段 R_1 变化到 R_2 的一段, 计算时需恢复完整的缓和曲线, 依完整缓和曲线要素就计算出 R_1 变化到 R_2 的一段的中桩坐标 (受篇幅所限, 此不赘述)。

S形是两个反向圆曲线采用缓和曲线连接起来的组合形式, 计算时以反弯点 (反向连接的公切点) 将曲线分开分别计算。

C形是同向曲线的两个缓和曲线在曲率为零处的径向衔接, 计算时以曲率为零处 (公切点) 将曲线分开分别计算。

凸形是两个缓和曲线间不插入圆曲线而径向衔接的组合, 计算时以衔接处 (公切点) 将曲线分开分别计算。

复合型曲线是指两个及以上同向缓和曲线在曲率相等处相互连接的曲线连接形式, 计算时需将每个缓和曲线分别计算, 关键是需要恢复出每一段完整的缓和曲线曲率要素来计算。

七、结语

在掌握了中桩坐标的计算方法后, 测量人员可以在没有计算软件的前提下, 自己进行坐标计算, 无论是使用普通科学型计算器还是使用可编程计算器, 都能顺利完成中桩坐标计算, 有能力的还可以使用 EXCEL 电子表格。在技术飞速发展的当代社会, 各种测量工具如全站仪、RTK 甚至都已经内装了公路曲线的计算软件, 使测量人员的劳动强度极大降低, 本文的目的是让公路测量人员了解和掌握公路路线中桩坐标的计算方法, 避免现代测绘仪器禁锢了公路测量人员的思维。

参考文献

[1] 陈方晔、李绪梅主编《公路勘测设计》, 人民交通出版社。