用组合数表达的方程组求$\sum_{l=1}^{n} l^k$

刘春菊　李静哲　王　华
（石家庄铁道大学四方学院基础部　河北　石家庄　050228）

[摘　要] 在用初等方法求$\sum_{l=1}^{n} l^k$，并推出了一个排列数表达的矩阵方程组求$\sum_{l=1}^{n} l^k$的方法。本文是用组合数表达的方程组求$\sum_{l=1}^{n} l^k$。

[关键词] 组合数矩阵；交错组合数矩阵；高阶等差数列

1 用交错组合数矩阵求$\sum_{l=1}^{n} l^k$

记$s_k(n)=\sum_{l=1}^{n} l^k$，有$s_k(n-1)=\sum_{l=1}^{n-1} l^k$。

可得关于n的递推公式：$s_k(n)=s_k(n-1)+n^k \quad (n\ge 2)$

而 $s_k(1)=1^k=1$。

在文[1]中，根据定理1，也可设$s_k(n)=a_0n^{k+1}+\cdots+a_kn$。于是下式成立：

$$a_0n^{k+1}\cdots+a_kn\equiv a_0(n-1)^{k+1}\cdots+n^k \tag{1}$$

将（1）右边依Newtou二项定理展开每个（$n-1$）的幂，并依n的幂合并同类项，有：（1）右可以写成

$$a_0n^{k+1}+\left[a_0C_{k+1}^1(-1)^1+a_1C_k^0(-1)^0+1\right]n^k$$

$$+\cdots$$

$$+\left[a_0C_{k+1}^{k+1}(-1)^{k+1}+\cdots+a_kC_1^1(-1)^1\right]n^0$$

对比（1）两端n同次幂的系数，依n^0，n^1，n^2，$\cdots$，n^k，n^{k+1}从上到下排列，即得方程组（已合并了左右两边相同的项）：

$$\begin{cases}(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}a_0+\cdots+(-1)^1C_1^1a_k=0\\ \cdots\\ (-1)^1C_{k+1}^1a_0+1\ =0\end{cases}$$

写成三角矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix}C_1^1 & -C_2^2 & \cdots & (-1)^{k+1}C_k^k & (-1)^{k+2}C_{k+1}^{k+1}\\ 0 & C_2^1 & \cdots & (-1)^kC_k^{k-1} & (-1)^{k+1}C_{k+1}^k\\ & 0 & \cdots & (-1)^{k-1}C_k^{k-2} & (-1)^kC_{k+1}^{k-1}\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & 0 & C_{k+1}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_k\\a_{k-1}\\a_{k-2}\\\vdots\\-a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

这就是求s_k（n）的系数矩阵方程。

例4 求$s_6(n)=1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6$

解：$s_6(n)=a_0n^7+a_1n^6+a_2n^5+a_3n^4+a_4n^3+a_5n^2+a_6n^1$

由上求矩阵方程，有

解得：$a_0=\frac{1}{7},a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{2},$

$a_3=a_5=0,a_4=-\frac{1}{6},a_6=\frac{1}{4^2}$

$\therefore\quad 1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6$

$=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{4^2}n$

2 用组合数矩阵求$\sum_{l=1}^{n} l^k$

令$s_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$，

则$s_k(n+1)=1^k+2^k+\cdots+n^k+(n+1)^k$

那么二者相减，得：

$$=c_k^0n^k+c_k^1n^{k-1}+\cdots+c_k^{k-1}n^1+c_k^k \tag{2}$$

前面已有结果

$\therefore s_k(n+1)-s_k(n)=a_0\left(c_{k+1}^1n^k+\cdots+c_{k+1}^{k+1}\right)$

$+\cdots+a_{k-2}\left(c_3^1n^2+c_3^2n^1+c_3^3\right)$

$+a_{k-1}\left(c_2^1n+c_2^2\right)+a_kc_1^1$

合并关于n次幂的同类项，得：

$s_k(n+1)-s_k(n)$

$=c_{k+1}^1a_0n^k+\left(c_{k+1}^2a_0+c_k^1a_1\right)n^{k-1}$

$+\cdots$

$+\left(c_{k+1}^{k+1}a_0+\cdots+c_1^1a_k\right)n^0$

将此式与（2）式等号右边比较n的同次幂的系数，得到：

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}c_1^1 & c_2^2 & \cdots & c_k^k & c_{k+1}^{k+1}\\ & c_2^1 & \cdots & c_{k-1}^{k-2} & c_{k+1}^k\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & c_k^1 & c_{k+1}^2\\ & & & & c_{k+1}^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_k\\a_{k-1}\\\vdots\\a_1\\a_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_k^k\\c_k^{k-1}\\\vdots\\c_k^1\\c_k^0\end{bmatrix}$$

这就是求s_k（n）的系数矩阵方程。其中，系数矩阵是一个组合数构成的方程，每一列元素正是$(a+b)^l\quad l=0,1,2,\cdots,k+1$展开式的系数。记$c_l^0=1$。

例5 求$s_7(n)=1^7+2^7+\cdots+n^7$

解：在本题中$k=7$，可记$\begin{matrix}s_7(n)=a_0n^8+a_1n^7+a_2n^6\\+a_3n^5+a_4n^4+a_5n^3+a_6n^2+a_7n\end{matrix}$

根据矩阵方程组有：

$$\begin{bmatrix}c_1^1 & c_2^2 & \cdots & c_7^7 & c_8^8\\ & c_2^1 & \cdots & c_7^6 & c_8^7\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & c_7^1 & c_8^2\\ & & & & c_8^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_7\\a_6\\\vdots\\a_1\\a_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_7^7\\c_7^6\\\vdots\\c_7^1\\c_7^0\end{bmatrix}$$

即

解得：

$a_0=\frac{1}{8},a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{7}{12},a_3=\frac{1}{3},$

$a_4=-\frac{7}{24},a_5=0,a_6=\frac{1}{12},a_7=0$

$\therefore 1^7+2^7+\cdots+n^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6$

$+\frac{1}{3}n^5-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2$

3 用高阶等差数列求$\sum_{l=1}^{n}l^k$

3.1 高阶等差数列

若已知数列$\{a_n\}$，称

$\Delta_{11}=a_2-a_1$，...，$\Delta_{1n}=a_{n+1}-a_n$，

...，为此数列的一阶差；而$\Delta_{21}=a_{12}-a_{11}$，，，...，$\Delta_{2n}=a_{1n+1}-a_{1n}$，...，

为此数列的二阶差；...，一般记$\Delta_{ki}=a_{k-1i+1}-a_{k-1i}$，$i=1,2,3,\cdots$为此

数列k一阶差。显然，若排列成下面倒三角阵：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7 \quad \cdots \\
& \Delta_{11} & & \Delta_{12} & & \Delta_{13} & & \Delta_{14} & & \Delta_{15} & & \Delta_{16} \quad \cdots & \\
& & \Delta_{21} & & \Delta_{22} & & \Delta_{23} & & \Delta_{24} & & \Delta_{25} \quad \cdots & & \\
& & & \Delta_{31} & & \Delta_{32} & & \Delta_{33} & & \Delta_{34} \quad \cdots & & & \\
& & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & &
\end{array}$$

则第二行起，其中每个元素都是其肩上两个元素中后一元与前一元之差。

定义　若数列$\{a_n\}$的k阶差数列$\{\Delta_{kn}\},n=1,2,\cdots$是一个常数列，则称$\{a_n\}$为k阶等差数列，即$\Delta_{k+1n}=0,n=1,2,\cdots$

推论　若数列$\{a_n\}$为k阶等差数列，则其k+1阶差及以上各阶差恒为零。

容易验证：$\{a+(n-1)d\}$是一阶等差数列，$\{n(n+1)\}$是二阶等差数列，而$\{n^k\}$是k阶等差数列。（接后面今验证）

3.2用高阶等差数列求$\sum_{l=1}^{n}l^k$

据阶差定义，数列中各元素与阶差显然有关系：

$a_2=a_1+\Delta_{11},a_3=a_2+\Delta_{12}=a_1+2\Delta_{11}+\Delta_{21}$

$a_4=a_3+\Delta_{13}=a_1+c_3^1\Delta_{11}+c_3^2\Delta_{21}+c_3^3\Delta_{31}$

用归纳法通项a_n可用a_1及上述倒三角阵中各行第一个元素表示为：

$a_n=a_1+c_{n-1}^1\Delta_{11}+$

$c_{n-1}^2\Delta_{21}+\cdots+c_{n-1}^{n-2}\Delta_{n-21}+c_{n-1}^{n-1}\Delta_{n-11}$

于是k阶等差数列的前n项部分和（注意：当$i>k$时有$\Delta_{i1}=0$）

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+\left(a_1+c_1^1\Delta_{11}\right)$

$+\cdots$

$+\left(a_1+c_{n-1}^1\Delta_{11}+\cdots+c_{n-1}^{k-1}\Delta_{k-11}+c_{n-1}^k\Delta_{k1}\right)$

据$c_1^k+c_2^k+\cdots+c_n^k=c_{n+1}^{k+1}$，并数列$\{l^k\}$的首项$a_1=1^k=1$，就得到求和公式：

$$S_k(n)=n+c_n^2\Delta_{11}+\cdots+c_n^k\Delta_{k-11}+c_n^{k+1}\Delta_{k1}$$

例6　求$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$

解：这是四阶等差数列

$\Delta_{11}=2^4-1=15,$

$\Delta_{21}=a_3-a_1-2\Delta_{11}=3^4-1-2\times15=50,$

$\Delta_{31}=60,\Delta_{41}=24$

$S_4(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$

（接前面）今验证1^4 2^4 3^4 4^4 …是四阶等差数列。

1^4　2^4　3^4　4^4　5^4　6^4　…一阶差　15　65　175　369　671

二阶差　50　110　194　302

三阶差　70　84　108

四阶差　74　24　…

参考文献

[1]周兰锁，尹晓军.一类5阶KdV方程的孤立波解[J/OL].应用数学，2019（02）：1-6

[2]潘玲.一类组合数求和问题的解法探究——由一节习题课引发的探讨[J].高中数学教与学，2018（24）：48-49.

作者简介：

刘春菊（1982-），女，汉族，保定蠡县，四方学院基础部，中级职称，长期从事数学的教学工作。

（上接第294页）

其四，在图书馆内部还需要设置保护制度。许多图书往往会有多人多次借阅，经常会有磨损的情况产生。有些磨损甚至非常严重，直接造成图书失去了原有的阅读功能。基于这一情况，图书馆内部应当设置保护制度，管理员也需要予以充分落实。所有书籍的借阅都需要按照相关程序执行，当读者进行归还的时候，理应认真校对，并做好检查工作。一旦发现有任何问题存在，理应及时采取措施进行处理，并与读者展开沟通，让其给予相应的赔偿。不仅如此，还需要对所有读者再三叮嘱，让其对所有借阅的书刊予以爱护。如此一来，书籍的使用寿命才能够得到有效延长[4]。

结束语

综上所述，图书馆的图书管理与图书利用之间存在着相互吸引的联系，与此同时，两者又相互独立。因此，图书管理工作人员应当正确认识自己的工作性质，在工作中秉持为读者便利服务的理念，从而优化读者的借阅方式。以此来满足不同需求的读者，从而吸引更多的人进入图书馆进行阅读。与此同时，还需要注重图书的损耗，提高服务质量，创设符合当地特色的图书馆。如此一来，图书馆的知名度便会得到提升，从而会有更多的读者前往。

参考文献

[1]曹秀丽.试论图书资料管理的开发与利用[J].山西广播电视大学学报，2015，9（6）：00084-00085.

[2]李志彬.论高校图书馆的管理与改革[J].沈阳大学学报（自然科学版），2016，18（13）：00120-00123.

[3]闫慧.青年学者论图情档一级学科核心知识及发展方向——2019年图书情报与档案管理青年学者沙龙会议述评[J].中国图书馆学报，2018，45（1）：00031-00032.

[4]全影[1].谈知识转化在图书馆的管理与利用研究[J].科教导刊（电子版），2017（12）：00134-00135.

[5]林晓玲，杨明华.RFID图书管理系统中图书定位排架方式探析[J].图书馆论坛，2012，32（3）：102-104，131.

[6]黄庆波.试论物联网技术在高校图书馆管理中的应用[J].中国科教创新导刊，2012，（16）：255-256.

[7]李文玲.基于提升读者素质的现代图书管理主动型功能探究[J].产业与科技论坛，2013，12（1）：150-151.