三类特殊不定方程的解法

金德华

（新疆六师五家渠第一中学　新疆　五家渠　831300）

［摘　要］ 首先，让我们来了解不定方程的概念：未知数的个数多于方程的个数的方程，叫做不定方程。本文将就三类特殊的不定方程展开分析和研究。

［关键词］ 特殊不定方程；解法；研究

类型一：

例 1、若实数 x、y 满足 $|x+y-3|+\sqrt{2x-y}=0$，则 x-y 的值是____

解读：要求 x-y 的值，就得知道 x 和 y 的值；要求 x 和 y 的值，就得建立关于 x 和 y 的方程；要建立关于 x 和 y 的方程，就得去寻找等量关系。

再一看已知条件，发现关于 x 和 y 的方程已经建立，很可惜，竟然是一个方程两个未知数，即不定方程，不免令我们失望。这时，就需要我们细心观察，看有没有什么发现。因为，观察能力是我们学好数学要培养的第一能力，练就一双慧眼那是非常有必要的。经过观察，不难发现这是两个非负数的和等于零的情形。这就让我们想起了，“若几个非负数的和等于零，那么这几个数都等于零。”宏观上把握得到$\begin{cases}x+y-3=0\\2x-y=0\end{cases}$，两个未知数两个方程，达成理想状态，问题得解。

例 2. －个数的平方根a^2+b^2和 4a-6b+13，那么这个数是＿

解读：要求这个数即$(a^2+b^2)^2$或 (4a-6b+13)2 的值，就得知道 a 和 b 的值；要求 a 和 b 的值，就得建立关于 a 和 b 的方程；要建立关于 a 和 b 的方程，就得去寻找等量关系。

看到已知条件“一个数的平方是a^2+b^2和 4a-6b+13”，联想到“一个正数的平方根有两个，它们互为相反数。”得到关于 a 和 b 的方程（ a^2+b^2 ）+(4a-6b+13)=0，只可惜，又是一个不定方程。再一看，也不像上题那样是两个非负数的和等于零的情形。那又该怎么办呢？我们知道，一切问题尽在转化之中，我们能不能把它转化成几个非负数的和等于零的情形呢？观察方程的特征，利用配方法不难到$(a+2)^2+(b-3)^2=0$，果然化成了几个非负数的和等于零的情形，宏观上把握到$\begin{cases}a+2=0\\b-3=0\end{cases}$，两个未知数两个方程，达成理想状态，问题得解。

规律总结：对于没有说未知数是什么数或者说未知数是实数的不定方程，处理思路是：右端化为零，左端化成几个非负数的和。而化成非负数的方法，常用配方法。

类型二：

例 1、设 x、y 都是有理数，且满足程$(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3})x+(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1)\pi=0$，那么 x-y 的值是 ________

解读：要求 x-y 的值，就得知道 x 和 y 的值；要求 x 和 y 的值，就得建立关于 x 和 y 的方程；要建立关于 x 和 y 的方程，就得去寻找等量关系。

由已知条件可知，关于 x 和 y 的方程已经建立，只可惜，又是不定方程，那怎么办呢？再看已知条件，发现“x、y 都是有理数”这就是美点所在，我们可把它整理成“有理数部分＋无理数部=0”的形式，，然后利用原理“设 a、b 是有理数，x 为无理数，若 a+bx=0，则 a=0 且 b=0. 得到$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4=0\\\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0\end{cases}$两个未知数两个方程，达成理想状态，问题得解。

规律总结：对于含有无理数且未知数是有理数的不定方程，处理思路是：化成“有理数部分＋无理数部分 =0 ”的形式。再利用原理“设 a、b 是有理数，x 为无理数，若 a+bx=0，则 a=0 且 b=0.”可解。

类型三：

例、已知$y=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}+18$，求代数式$\sqrt{x}-\sqrt{y}$的值．

解读：要求$\sqrt{x}-\sqrt{y}$的值，就得知道 x 和 y 的值；要求 x 和 y 的值，就得建立关于 x 和 y 的方程；要建立关于 x 和 y 的方程，就得去寻找等量关系。

由已知条件可知，关于 x 和 y 的方程已经建立，只可惜，又是不定方程，那怎么办呢？再看已知条件，发现“方程中含有二次根式，且被开方数 x-8 与 8-x 互为相反数”这就是题目的美点所在，我们可以从二次根式有意义的条件入手，得到$\begin{cases}x-8\ge 0\\8-x\ge 0\end{cases}$，解这个不等式组，得 x=8，再把 x=8 代入方程$y=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}+18$中，得 y=18，这样就求出了 x 和 y 的值，问题得解。

规律总结：对于含有二次根式且被开方数互为相反数的不定方程，处理思路是：从二次根式有意义的条件入手，得到不等式组，解这个不等式组可得未知数的值或者关于未知数的方程。

例 2、已知$y=\sqrt{\frac{x^2-2}{5x-4}}-\sqrt{\frac{x^2-2}{4-5x}}+2$，则$x^2+y^2$ =__________

解读：要求x^2+y^2的值，就得知道 x 和 y 的值；要求 x 和 y 的值，就得建立关于 x 和 y 的方程；要建立关于 x 和 y 的方程，就得去寻找等量关系。

由已知条件可知，关于 x 和 y 的方程已经建立，只可惜，又是不定方程，那怎么办呢？再看已知条件，发现“方程中含有二次根式，且被开方数$\frac{x^2-2}{5x-4}$与$\frac{x^2-2}{4-5x}$

互为相反数”这就是题目的美点所在，由二次根式有意义的条件，得$\begin{cases}\frac{x^2-2}{5x-4}\ge 0\\\frac{x^2-2}{4-5x}\le 0\end{cases}$

解之，得 x2=2，再把 $x^2=2$ 代入$y=\sqrt{\frac{x^2-2}{5x-4}}-\sqrt{\frac{x^2-2}{4-5x}}+2$中，得 y=2，从而问题得解。

参考文献

[1] 谭兴华，张一洲．一类特殊 n(n ＞ 2) 元不定方程的简便解法 [J]. 新疆教育学院学报，2006(04)：132-133.

[2] 刘永明．一次不定方程的解法 [J]. 数学教学，2018(09)：42-44.

[3] 郭梦媛，高丽．部分简单不定方程的求解问题的讨论 [J]. 科技资讯，2018,16(04)：211-212.