变错解、漏解为正解：让数学课堂错也错得值得

黄如意[1]　薛　鹏[2]
（广西民族师范学院附属中学数学组　广西　崇左　532200）

[摘　要] 当代科学家、哲学家波普尔说：“错误中往往孕育着比正确更丰富的发现和创造因素，发现的方法就是试误法。”那么，如何开展数学“悟错课”活动，让我们的学生在自己常犯的错误和挫折的教训中变得聪明起来呢？这无疑成为我们值得思考和探索的课题。本文试着结合解题活动中所遵循的统一性、特殊性、等价性三个方面进行探讨，力求通过这些方面的分析来改变我们的教学方法，提高教学效率，启迪学生思维。

[关键词] 错解；数学；分析

1 忽略统一性而导致的错误

在解题过程中要随时注意整体与局部的关系，不能以局部的性质代替整体，从而避免发生错误。

例1 设 $x>0,y>0,x+2y=5$，求 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值

展示错解：因为 $x>0,y>0,x+2y=5$，

所以 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}=2\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$\geq 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

故 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

引导学生悟错：本题错解的原因在于忽视了不等式的变换过程中等号成立的统一性，对于不等式 $2\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\geq 2\sqrt{2}$ 而言，是当且仅当 $2\sqrt{xy}=\frac{1}{\sqrt{xy}}$，即 $2xy=1$ 时取等号，而不等式 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{2}$ 而言，是当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$，即 $x=2y$ 取等号，这两个不等式同时成立时有 $x=2y=1$，而已知条件 $x+2y=5$，二者取值不统一，故的最小值不是 $4\sqrt{2}$。

为了避免此类错误的发生，在引导学生悟错的过程中，帮助学生树立整体的思想，即在一个不等式的整个变换过程中，等号成立的条件应该是统一的。要养成检验等号成立的习惯，若不能同时成立，则不能直接运用基本不等式，需另辟蹊径，通过灵活转换为能保持等号成立的统一性的方法来解决。

正解：因为 $x>0,y>0,x+2y=5$，

所以 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}=2\sqrt{xy}+\frac{6}{\sqrt{xy}}\geq 4\sqrt{3}$，当且仅当 $2\sqrt{xy}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$ 取等号，即 $x=2,y=\frac{3}{2}$ 时取等号，故 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$

2 忽略特殊性而导致错误

任何事物都具有普遍性和特殊性，如果我们只注意到事物的普遍性而忽视了事物的特殊性，便会得出片面的结论，解决数学问题也是如此。

例2 从4人中，选出3人排成一排，问甲不在中间的排法有几种？

展示错解：甲不在中间，则甲的排法有 A_2^1 种，其余两个位置由剩下的3人中任选2人来排，有 A_3^2 种，所以总排法有12种。

引导学生悟错：本题容易出错的原因在于忽视了事物的特殊性。事实上，当这三人中没有甲也是可以的。因此此题要分包含甲和不包含甲的两种情况讨论。

正解：若这三人中包含甲，则有12种排法；若三人中不包含甲，则有 $A_3^3=6$ 种排法。故正确答案为12+6=18种。

3 忽视等价性而导致错误

数学问题的条件有些事显性的，有些事隐性的，每一道数学问题或多或少隐含着一些条件，解题时要将其挖掘出来，应用于解题过程中，才能确保解答的准确性。

例3 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，且对任意的 $n\in N_+,a_n=n^2+bn$ 恒成立，求实数b的取值范围。

展示错解：因为数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_n=n^2+bn$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，故对应的 $f(x)=x^2+bx$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，则 $\forall x\in[1,+\infty),f'(x)=2x+b\geq 0$ 恒成立，即 $\forall x\in[1,+\infty),b\geq -2x$，故 $b\geq -2$。

引导学生悟错：由于数列是一种特殊的函数，故而极易选取类比源，并将数列恒成立问题类比迁移为相应辅助函数的恒成立问题，看似天衣无缝，可惜错了。数列的单调性与相应的辅助函数的单调性并不总是一致的，不可盲目的直接类比套用。

正解：因为数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_{n+1}-a_n>0,(n\in N_+)$ 恒成立，即 $b>(-2n-1)_{\max}=-3$

为了避免此类错误的发生，解题时要认真审题，尽可能地把题设中的隐含条件挖掘出来，作为解题的依据加以应用，只有这样才能避免错解的发生。

辨析问题错解的原因，厘清什么是错误的，错在何处，为何产生这种错误，从而探索避免错误发生的对策以及解决问题的正确思路，提高解答数学问题的准确性；通过悟错，训练学生数学思维的严谨性、深刻性、灵活性、批判性与独创性，使学生的数学素养得到有效提升。

参考文献

[1]徐爱勇.数学错解中的定性分析[J].中学数学研究，2012（5）.

[2]赵建勋.排列组合中的遗漏和重复问题[J].中学数学，2015（5）.