数学教学中的悟错分析
——以一道数列题的教学过程为例

黄晓阳
（广西民族师范学院附属中学 广西 崇左 532200）

[摘 要] 高中数学的学习要经过学生不断地积累知识并相应的灵活运用，与错误较量的过程中掌握真知，收获知识，提升思维。结合数列题中某一类通项公式的求法过程，启迪学生思维，认识错误根源，领悟正确知识。

[关键词] 认识错误；领悟真知；数列题；教学过程

失败是成功之母，错误若得到很好的引导，将会了解错误来源，对数学的基本考点有进一步的认识，在不断尝试和错误中收获知识，即试误法。

在教学过程中，并不是一开始就能直接击中知识点及正确的解题思路，可以从学生的思维角度出发，共同探讨解题思路，适当诱错、示错、识错、明错、改错、悟错，让学生从错误中走出，认清正确的道路，因此，悟错过程在学习当中具有相应的教学价值。

下面我将结合具体例子谈谈教师"示错—纠错—悟错"的教学过程，启迪学生思维，误中有悟，提高解题的正确性。

一、认知不足，导致错误

学生知识结构的不完整导致错误思维的出现，通过暴露错误，引导学生认识错误根源。

例题：已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=3.2^{n-1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。从题型看，此题属于由递推公式求解数列的通项公式题型，在前面的学习中，已经学习了$a_{n+1}-a_n=f(n)$（累加法），$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$（累乘法），$a_{n+1}=pa_n+q(p,q\text{为常数})$三种类型，因此学生首先想到能否采用上述三种方法。

生1：我比较喜欢用特殊值法计算，从中寻找规律，大致归纳通项公式提供思路，再从递推推导通项公式，计算得出$a_2=5,a_3=16,a_4=44$，但发现找不着规律。

生2：采用$a_{n+1}=pa_n+q(p,q\text{为常数})$类型解决，运用待定系数法。

生3：用累加法求解。

第一种分析方法由于取值的特殊性，前面几项的关系并不能代表所有项的关系，欠缺严谨性，这是我们的学生出现的问题，当然，在选填题比较适用，在大题也可以提供一些参考作用；第二、三位学生的错误是比较明显的，对我们前面知识的应用范围理解有误，忽略""q为常数""这一限制，累加法适用于a_{n+1}、a_n系数一致，代入后也是算不出结果的，因此此法是错误的。

通过此教学片断，暴露了学生思维的一些漏洞，此时教师应充分引导，发挥学生的智慧，探究方法。

引导探究，纠正错误

在此，教师要充分运用学生已有认知，将问题转化成已有知识，把问题简单化，搭建思维空间。

师：我们前面的几种方法已经不适用，回顾求证通项公式，要么该数列为等差数列，或者是等比数列，或者说相应的形式是等差或等比数列，都离不开后一项与前一项的差或比值是同一个常数。

生4：两边同时除以2^{n-1}，得$\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}}-\frac{a_n}{2^{n-2}}=3$，令$b_n=\frac{a_n}{2^{n-2}}$，则$b_{n+1}-b_n=3$ $\therefore\{b_n\}$是首项为1，公差为3的等差数列，$\therefore b_n=1+(n-1).3=3n-2$，$\because b_n=\frac{a_n}{2^{n-2}}$ $\therefore a_n=b_n.2^{n-2}=(3n-2).2^{n-2}$

师：这位同学的想法不错，两边同时除以某个数，把它转化成了熟悉的等差数列，采取了构造法，观察发现下标和指数的关系，把$\frac{a_n}{2^{n-2}}$看成一个新的数列b_n，先求出数列$\{b_n\}$的通项公式，再求出数列$\{a_n\}$的通项公式。你有发现什么漏洞吗？

生5：$\because b_1=\frac{a_1}{2^{1-2}}=2$，$\therefore\{b_n\}$是首项为2，公差为3的等差数列，$\therefore b_n=2+(n-1).3=3n-1$，$\therefore a_n=b_n.2^{n-2}=(3n-1).2^{n-2}$。

师：这位同学眼睛比较尖，既然是求$\{b_n\}$的通项，那么首项应为b_1，而不应忽略了首项的取法，直接把a_1的值作为首项。

师：能否两边同时除以2^n？

生6：可以，两边同时除以2^n，得$\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=\frac{3}{2}$，令$b_n=\frac{a_n}{2^{n-1}}$，同上类似求出数列$\{a_n\}$的通项公式。

师：有些同学或许发现不了令$b_n=\frac{a_n}{2^{n-2}}$，我们一般会考虑对称性，项数和指数一致的时候更容易看到构造地类型，那两边同时除以何数才能更清晰地构造呢？

生7：两边同时除以2^{n+1}，得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{4}$，令$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，则$b_{n+1}-b_n=\frac{3}{4}$，$\because b_1=\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}$，$\therefore\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$\frac{3}{4}$的等差数列，$\therefore b_n=\frac{1}{2}+(n-1).\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(3n-1)$，$\therefore a_n=b_n.2^n=(3n-1).2^{n-2}$。

师：从上面的探究我们发现可以两边同时除以2的某次方，把右侧变成常数。若该题变成"已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}-3a_n=2^n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式"，两边同时除以什么？2^{n+1}？3^{n+1}？

生8：两边同时除以3^{n+1}，得$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$，令$b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$，采用累加法求出 $\{b_n\}$的通项公式，再求出数列$\{a_n\}$的通项公式。

师：若变成"已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}-3a_n=3.2^{n-1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式"？

生9：两边同时除以3^{n+1}，得$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，令$b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

通过多个例题及变式，发掘学生的思维，顺应学生思维求解，发现常出现的问题，细节及计算错误，呈现错误原因，让课堂生成性更加饱满，及时解决学生存在的问题，优化解题方法，活跃学生的思维，引导把新知转化成为旧知。

三、归纳总结，误化为悟

师：从上面的例题及相应的变式，你发现了什么？

生10：右边为某个数的次方形式，采用构造法求解通项公式。

师：由此我们可以归纳，若递推公式为$a_{n+1}-pa_n=q^n(p,q\text{为常数})$或$a_{n+1}-pa_n=r\cdot q^n(p,q,r\text{为常数})$，求数列$\{a_n\}$的通项公式"，则此类通项公式的求法为两边同时除以$p^{n+1}$，将其转化为$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{a_n}{p^n}=\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n$或$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{a_n}{p^n}=\frac{r}{p}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n$形式，再通过累加法求解.

在教学过程中，课堂上会有各式各样生成性的东西，学生一开始的认知并不会直接走向正确的解题思路，这需要我们能够顺着他的思路，点出错误思路的根源，让他们能够辨识错误，改变错误，走向正确的道路，有利于提升学生的解题思维，从而提升课堂的有效性。

参考文献

[1]桑代克.教育心理学[M]（三卷本1903/1913-1914）

[2]兰诗全.误中求悟"三步曲"——以一道概率题的教学过程为例[J].中国数学教育.2014（18）：44-46.