

直角弯管头与正弦曲线的应用

詹远美

(重庆市第十八中学 重庆 400020)

[摘 要] 本文采用正弦曲线模型来讨论直角弯管头接口处的侧面展开图, 通过空间几何体中的数量关系和建立直角坐标系的方法分别证明了直角弯管头接口处的侧面展开图是正弦曲线 $y = A\sin(\omega x + \phi) + B$ 的一部分, 并将后一种方法扩展到柱面上空间曲线的展开图。

[关键词] 直角弯管头; 正弦曲线; 实际应用; 空间曲线展开

一、一道应用题引出的问题

例: 下面四个平面图形中, 可以卷成右图所示的烟囱的“直角弯头”的一半的是 (C)。

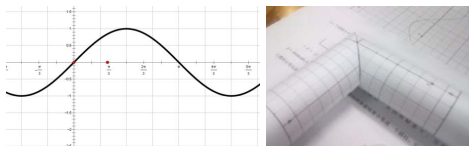


为什么直角弯管头接口侧面展开图是正弦曲线呢? 本文将用实物模型验证和数学推导来证明, 并将这种方法扩展到一般柱面上空间曲线的展开图。

二、实物模型验证

1. 利用计算机软件绘制以下曲线并制作实物模型:

(1) 正弦曲线 $y = \sin x$ 在一个周期内的图象;



从图中可以看出, 正弦曲线模型符合实际

(2) 抛物线 $y^2 = 4x$;

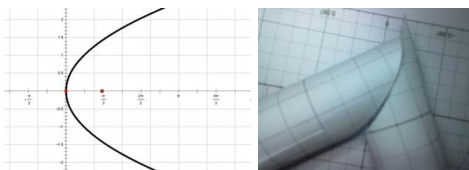


图: 抛物线模型不能吻合

(3) 曲线 $y = |x|$;

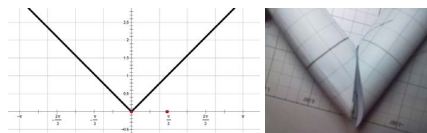


图: 直线模型不能吻合

(4) 曲线 $x^2 + y^2 = 1$ ($0 \leq y \leq 1$).

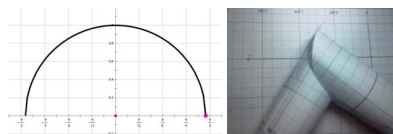


图: 圆弧模型不能吻合

2. 分析实物模型

通过观察实物模型, 我们发现正弦曲线模型可以很好地符合实际, 而其他三种曲线模型均不能吻合. 于是提出猜想: 直角弯管头接口展开图是正弦曲线的一部分。

三、从实物模型到数学模型

观察实物模型并使用计算机3D软件模拟直角弯管头。

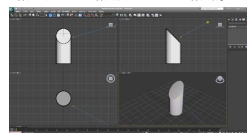
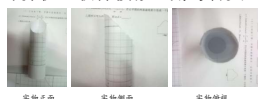
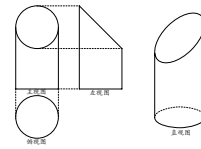


图: 使用3ds Max观察三视图

通过观察, 我们发现直角弯管头一半的三视图如图:



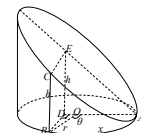
借助三视图, 我们可以在几何体中建立数量关系。

1. 在空间几何体中运用几何关系研究接口。^[1]

如图, 点O是底面圆心, $BD \perp OA$, BCD所在平面垂直于底面. $BC = h$, 弧长 $\widehat{AB} = x$, 则 $x = r\theta$. 结合三视图可知, $h = CB = DE = DA$.

在 $\triangle OBD$ 中, $OD = r \cos(\pi - \theta) = -r \cos \theta$, 所以 $h = r + OD = r(1 - \cos \theta)$.

又因为 $x = r\theta$, 所以 $h = -r \cos \frac{x}{r} + r = -r \sin(\frac{x}{r} + \frac{\pi}{2}) + r$, 其中 r 是一个常数, 即直角弯管头接口展开图是正弦曲线。



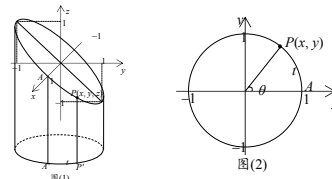
2. 利用坐标系研究接口。

由于坐标系中的单位长度可以任意规定, 为了简化关系, 可以建立适当的直角坐标系, 并以底面半径为单位长度。

如图(1), 建立直角坐标系, 以椭圆截面的中心为原点O, x轴垂直于椭圆长轴且平行于底面, y轴与椭圆长轴在同一平面且平行于底面, z轴垂直于底面; 以底面半径为坐标轴的单位长度。

设接口边缘上一点P(x, y, z), 结合三视图可知P点坐标(x, y, z)满足 $z = -y$.

结合P点在xOy平面上的投影, 通过参数方程确定展开图。



设图中的曲线AP对应的底面圆弧 $A'B'$ 长为 t , $\angle A'OP' = \theta$. 则 $t = \theta$, $y = \sin t$;

将侧面展开图置于平面直角坐标系 $x'O'y'$ 中, 则 $\begin{cases} x' = t \\ y' = z = -\sin t \end{cases}$ (t 是参数,

$0 \leq t < 2\pi$), 消去参数可得 $y' = -\sin x'$, 所以其接口处侧面展开图是正弦曲线。

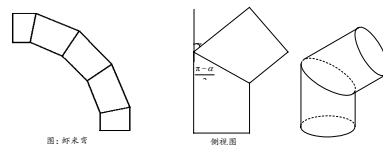
四、工业生产的方案

1. 工业生产的方案。

实际的工业生产中, 如果管道接口成直角, 流量会受到一定的限制, 这时我们会采用另一种叫做“虾米弯”的方案, 使弯管头尽可能接近圆弧, 从而减小对流量的影响。

现在探究这样的曲线在适当的坐标系中的方程。

如图, 设弯管头每一部分转角为 α . 类似直角弯管头的方法, 建立坐标系研究弯管头中的数量关系。

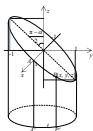


由于接口处在xOy平面上的投影和直角弯管相同, 所以P(x, y)仍满足直角弯管中的关系 $t = \theta$, $y = \sin t$.

对于P点的z坐标, 有 $z = -y \cot \frac{\pi - \alpha}{2} = -\tan \frac{\alpha}{2} \sin t$; 对于特定的弯管头来说, $-\tan \frac{\alpha}{2}$ 是一个常数。

若建立适当的坐标系 $x'O'y'$, 这条曲线的方程可以简化为

$$y' = \tan \frac{\alpha}{2} \sin x' \quad (0 \leq x' < 2\pi).$$



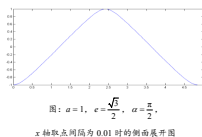
所以，弯管头每一个接口，其侧面展开图是正弦曲线。

2. 怎样最省料。

怎样最省料？这是一个在生产生活中的重要问题。对于已经成形的管道来说，接口的角度对材料的使用并没有什么影响。然而对于需要从平面裁量上裁剪并成形的材料，考虑最省料的问题很有必要。

方式1：裁剪成长方形并卷成圆柱，然后按需切割。裁剪方式如图（1）：

方式2：直接利用正弦曲线裁剪并卷成管道的一部分。裁剪方式如图（2）：



```

1 a=1
2 theta=pi/2
3 alpha=pi/2
4 theta=0
5 t=0:0.2:pi
6 y=-a*tan(alpha/2)*cos(t)
7 syms theta
8 f=diff(y,sqrt(1-e^2*cos(theta)
9 '2'),'theta')
10 for i=1:length(f)
11 end
12 plot(x,y)
MATLAB程序[14]
  
```

图：a=1, e=1/2, alpha=pi/2, x轴取点间隔为0.01时的侧面展开图

图（1）

图（2）

图中阴影部分都是卷成圆柱后被切割掉的部分，这些废料难以再次利用。

从上面的图中可以看出，方式2几乎没有废料，并且使用这种裁剪方式，将管道拼合之后，裁剪处能够很好地结合，从而增强实用性。

五、扩展与延伸

对于柱面上空间曲线的平面展开图，本文采用的方法具有一般性：以其在xOy平面投影中的某个几何量为参数t，探究曲线上一点的z坐标与t的函数关系；展开图在坐标系x'O'y'中x', y'坐标分别与t, z成函数关系，得到参数方程 $\begin{cases} x' = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$ ，消去参数即可得到曲线的平面展开图的方程。

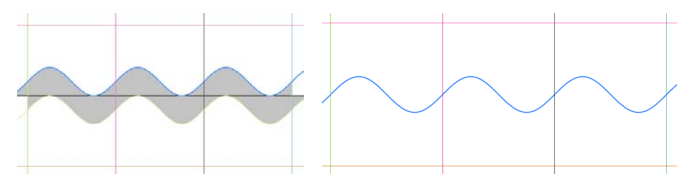
通过这样的方法，我们可以将问题延伸。例如，当管道的横截面是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)a^2} = 1$ (a>0, 0<e<1) 时，取椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sqrt{1-e^2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 是参数})$$

，长轴与弯道半径同向，管道每一段的转角为α（即用与椭圆柱面母线成 $\frac{\alpha}{2}$ 的平面，平行于横截面短轴，截椭圆柱面）。接口上一点P的投影P'对应的参数θ取值为t，在适当的坐标系下可以求得其展开图在适当的坐标系xOy中的

$$\begin{cases} y = -a \tan \frac{\alpha}{2} \cos t \\ x = a \sqrt{1-e^2} \cos^2 t \end{cases} \quad (t \text{ 是参数})$$

参数方程为。虽然方程消去参数后并不简洁，但仍可以研究其展开图的性质，并利用计算机软件作出图象。下图是在Matlab软件中使用的“描点法”作出的图象。



通过作图可以发现，椭圆柱面和圆柱面两种情况下，虽然展开图方程迥异，但其图象有一定的相似性。在以上程序中，分别对e赋不同的值，当e接近0（相当于圆柱面）或1（相当于平面的一部分）时，展开图也近似于正弦曲线或两条线段，这与直观感受相符。

六、新的思考

课本之外的探索同样精彩。通过这次活动，学生能更好地运用学过的数学知识，并把模型从直角弯管头扩展到求柱面上空间曲线的展开图。但是探究的旅程永远没有终点：锥面上曲线的展开图是怎样的？当问题从圆柱面延伸到椭圆柱面时，为什么曲线展开图的方程却变得复杂很多？限于当前的能力，这些问题还暂时不能得到很好的解答，但我相信，随着学习的深入，将会在以后的学习中拨开重重疑云，揭开更多的真理。

参考文献

[1]刘媛媛,唐太财,柳荣华.正(余)弦曲线在数控车床上的编程应用[J].南方农机,2019,50(22):169+176.
 [2]郑威.曲沟球轴承的外圈优化设计与振动特性分析[D].西北农林科技大学,2019.

大班幼儿自主学习习惯的培养策略

冯璐

(山东省东营市胜利石油管理局第三实验幼儿园 山东 东营 257000)

摘要 好的学习习惯越多，学习起来就更加容易。幼儿阶段是学习的起步阶段，养成良好的学习习惯至关重要。由于幼儿活泼、好动、注意力分散等特点，养成自主学习习惯非常困难。本文针对幼儿园大班孩子特点，简单探讨了如何培养孩子自主学习习惯。

关键词 自主学习；激励；大班

英国著名的哲学家洛克曾经说过：“儿童不是用规则可以教好的，规则总会被他们忘掉的。习惯一旦养成之后，便用不着借助记忆，很容易地自然地就发生作用了。”因此，在幼儿教育当中，让幼儿养成自主学习习惯至关重要。大班孩子在角色上有着自身的特点，它是幼儿园到小学过度时期，即将进入一种全新的学习阶段。这对他们来说需要时间去适应、去磨合。养成自主学习习惯，不仅可以让孩子们的小学学习生活开启得更顺利，同时一个好习惯也会让他们收益终身。

一、创造轻松、自由的学习环境

学习环境对于孩子的学习至关重要。良好的学习环境可以无形地将孩子带入到学习活动中。然而幼儿本身具有活泼好动的特点。因此，在实际教学中，更应注重创造适合他们年龄特点的学习环境，如轻松、自由的环境。在舒适的环境中学习，孩子会对学习更加感兴趣，会集中注意力到学习中去。这样也有助于培养他们自主学习的习惯。

在实际教学中，创造轻松、自由的学习氛围，教师发挥着关键作用。首先教师要充分了解每个孩子的性格特点及兴趣爱好。为他们准备充足的学习用具，演示多种学习方法。孩子可以自由选择自己喜欢的学习材料，采用适合自己的学习方法。当然在教学活动中，孩子难免会犯错，这时教师要依据孩子特点，加强与孩子的沟通，采用正确的方法引导孩子认识到自己的错误并改正错误。让孩子始终在轻松的环境中学习，让他们真正爱上学习，最后才会自主学习。

二、示范教学，加深对自主学习习惯的认识

与成人思维方式相比，幼儿没有良好的理性思维和认知能力，他们一般都是通过模仿来认识学习一种新事物。因此在教学活动中，教师应该多示范教学，这样孩子更容易理解。示范教学的方式可以多种多样，只要能调动孩子的积极性即可。如可以通过电脑、电视、PPT等多媒体示范，也可以通过肢体语言亲自示范，还可以请表现突出的小朋友示范。通过多种形式的示范，让小朋友们深入理解自主学习的意思。为他们养成自主学习习惯奠定基础。

三、充分发挥幼儿主导作用

玩是幼儿的天性，因此现代幼儿教育基本上就是在玩中学，学中玩。中国青少年研究中心主任孙云晓说：“充分尊重儿童的权力，让他们在习惯养成中发挥主人的作用。”孩子在玩的过程中，少不了玩的东西。教师在开展教学活动之前，要为孩子们准备充足的、种类多样的学习材料，然后由小朋友们依据自己的兴趣爱好选择，还可以依据自己的意愿选择学习材料的数量。在传统的教学模式中，教师在

教学中起着主导作用，现代幼儿教育要改变这种模式，让孩子成为教学的主体，老师只是引导学生开展学习活动。因此在教学中，老师只是为孩子们安排学习任务，然后由孩子自由选择学习内容，采用适合自己的学习方法。充分发挥孩子的主导作用，促进他们自主学习。

如在“快乐圣诞节”的主体活动中，教师为孩子们准备了卡纸、彩笔、圣诞帽、圣诞树、圣诞袜等学习材料，然后通过PPT为孩子们播放一些圣诞习俗，圣诞歌曲等。让孩子们从感官上深入地理解圣诞节，用心去感受圣诞节的气氛。对圣诞节有了大概的了解后，教师安排教学任务，让小朋友们设计与圣诞节相关的物品。这时孩子们可以自由组合，自主选择学习材料，根据自己的兴趣爱好进行创作。如画圣诞树，做圣诞帽，剪长筒袜等等。这样不仅培养孩子的动手能力和思维能力，还使孩子在教学活动中体验到快乐，充分发挥了其在教学中的主导作用。

四、运用激励方式，促使自主学习习惯养成

幼儿普遍都希望得到老师的认可，因此在幼儿教育中，教师通常会用激励方式来调动孩子的积极性。教师合理的鼓励，会使孩子更加自信，更加努力去做好每件事。大班的孩子通过一段时间的幼儿学习，是有一定的学习基础的。教师对他们激励方式要多样化，如可以以精神激励或者物质奖励等。通过多种激励方法，让孩子更加自信，学习更有动力。

如在教学活动中，有小朋友自主学习，这时教师应在班上把他当作榜样进行表扬，并引导其他小朋友学习。同时还要对这位小朋友给予物质奖励，老师可以提前准备孩子们感兴趣的学习文具、玩具、漂亮的小贴画等，让小朋友依据自己的喜好选择奖品。通过这种方式不仅可以表现突出的小朋友继续保持这种良好的学习习惯，他们还可以起到榜样作用，引导其他小朋友也养成自主学习习惯。

结语

洛克曾经说：“一切教育归根结底都是为了培养人良好的习惯。”好的习惯会让人受益终身。当然良好的自主学习习惯也会让学生在学道路上走得更加顺畅。因此在幼儿阶段就让孩子养成自主学习习惯至关重要。教师要结合幼儿特点，运用合适的教学方法，充分发挥孩子在教学中的主导作用，引导他们自主学习，养成自主学习习惯，为以后学习奠定良好的基础。

参考文献

[1]宋淑芬.幼儿园大班教学活动中师幼互动研究[D].山东师范大学,2019.