反证法在数学证明中的应用研究

罗晓燕

赣州市蟠龙中学

[摘　要]反证法是证明数学命题的一种间接证法，是从要证明命题的逆否命题出发利用有关定义，公理和条件进行推理，直到得出矛盾，从而判断其逆否命题不成立，即肯定原命题结论。反证法的逻辑思维强、数学语言的准确性高，对培养学生严谨的逻辑思维能力、阅读理解能力、树立正确的数学观具有重要意义，同时它又是大学数学的基础。因此，反证法在中学数学中的占有重要地位。反证法这种推理论证形式是培养学生逆向思维能力的重要途径之一。本文主要论述反证法的原理及其在证明各种命题中的应用。

[关键词]反证法；证明；思维培养；数学语言

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2020.02.1600

引言

在数学中，为了证明一个命题成立，有两种方法，一是直接证法，一种是反证发。反证法采用的是逆向思维方式，即不直接证明结论，而是间接的去否定与事物相反的一面，从而得出事物真实的一面。关于反证法的定义，法国数学家J·阿达玛在其所著《初等数学教程》（平面几何卷）中作了最准确、最简明扼要的描述：反证法在于表明，若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾”。先作出命题结论的反面成立的假设，然后从这个假设出发，结合已知的定理条件进行正确的推理、论证，得出和命题中的题设或前面学习过的定义、公理、定理、已知的事实相矛盾或自相矛盾的、荒谬的结果，再根据排中律断定命题结论的反面不可能成立，进而肯定命题结论的正确性，这种证明的方法就叫做反证法。反证法是逆向思维的方法，被誉为数学家最精良的武器之一，是解数学题常用的方法[1]。

1.反证法的基本原理及证明结构

反证法就是通过证明命题结论的反面错误，从而断定命题结论正确。它在逆向思维的论证过程中强调了四种命题（原命题，逆命题，否命题，逆否命题）之间的关系，受到了一举两得的效果。它对培养学生的逆向思维，拓展学生证解题思路，形成良好的数学思维品质有着重要作用。同时它能锤炼学生思维的缜密性，增强学生思维的批判性及创造性[2]。在数学的教学中应强调反证法的作用，尽可能地把一个问题用直接证法和反证法两种方法来做。即使对那些只能使用一种方法证明的命题，也要在证明之后，分析另一种证法的障碍以便两种方法相互对照，从而进一步提高学生的逆向思维能力。

1.1反证法的基本原理

反证法就是先假设结论的反面成立，然后根据这个假设，推导出与题设、定义、公理、定理、假设及客观事实相矛盾的结果，对假设加以否定，从而肯定要证明的结论成立。即：已知条件A，要证结论B，就可以证明与原命题等价的逆否命题是对的，结论B不成立，则条件A也不成立，从而说明条件A成立时，结论B一定成立。反证法的实质是暴露新命题与已知数论与题设条件的不相容性，是通过转换命题实现转化，并揭露矛盾，使之显化和形式化而解决问题，因此转化矛盾和显化矛盾是反证法的基本思想。

1.2反证法证明命题的推理核心

用反证法证明一个命题：原命题：若A，则B。相应地会考虑其逆否命题：若非B，则非A。这两个命题的真假关系等价。当我们把“若A，则B”看成一个复合命题时，它的否定形式是“A　且非B”；再假设“非B则A”，由此推断，如果导出矛盾，那么“非B则A”为假，因此“若A，则B”为真。

用反证法证明命题“若A，则B”时，从“若非B”出发，可能出现下面三种情况[3]：

1）推出非A 为真。即与原命题的题设矛盾。

2）推出B 为真。即与假设“非B 为真”矛盾。

3）推出一个恒假命题。

1.3反证法证明命题的基本步骤

我们总结出一般情况下，用反证法证明命题的三个步骤：

（1）提出假设（反设）：作出与求证结论相反的假设。否定结论必须先搞清楚结论本身的情况，再找出结论的全部相反情况，若有两种或两种以上的情况，要用穷举反证法，不能有遗漏。

（2）推出矛盾（归谬）：恒假命题（与定理、公理矛盾、与假设矛盾、与题设矛盾）。寻找矛盾时要进行正确的推理，只有经过正确推理得出的矛盾才能作为否定假设的依据。另外，由于能从不同的角度推出矛盾，因此，应用反证法也有一题多证，最好选择最优证法。

（3）肯定结论（结论）：说明反设不成立，从而肯定原命题成立。

2.反证法证明的基本思维结构

数学是思维的科学，而思维最显著的特点是概括[4]。数学知识的学习和应用的过程之一就是数学思想的概括。在数学思想方法中有一些是解决一类问题时可以采用的共同方法，这些方法的操作程序不是非常具体，但适用的范围比较广泛，反证法就是其中之一。

我们知道，数学思维品质反映了数学思维过程的科学性、灵活性以及广度和深度的水平层次。显然，要有高水平的数学思维品质必须以懂得如何进行数学思维、如何解决数学问题为前提，因此掌握数学思想方法是培养数学思维品质的关键[4]。

培养数学思维的灵活性，就是要掌握较丰富的数学思维技巧，数学中同一类型的方法往往可以有多种表现形式，掌握这些不同的表现形式也是培养数学思维灵活的必要前提。反证法以下列五个逻辑等价式为理论依据：

$$p \to q \equiv \bar{q} \to \bar{p};$$

$$p \to q \equiv (p \wedge \bar{q}) \to \bar{p};$$

$$p \to q \equiv (p \wedge \bar{q}) \to (r \wedge \bar{r})$$

$$p \to q \equiv (p \wedge \bar{q}) \to q;$$

$$(p \wedge p') \to q \equiv (p \wedge \bar{q}) \to \bar{p}'$$

相对应也就有五种反证法的形式：

（1）通过证明逆否命题达到证明原命题的目的；

（2）把$\bar{q}$作为前提，与已知前提p合取，推出与前提p相矛盾的结果$\bar{p}$；

（3）把$\bar{q}$作为前提，与已知前提p合取，推出相互矛盾的两个结果r与$\bar{r}$，其中包括与公理、定理、已知真命题相矛盾的情形；

（4）把$\bar{q}$作为前提，与已知前提p合取，推出与$\bar{q}$相矛盾的结果q；

（5）把$\bar{q}$与原命题的前提中的p合取，推出与前提中的

p相矛盾的结果$\bar{p}$’。

其中，反证法的逻辑依据涉及形式逻辑中的两个基本规律——矛盾律和排中律。

矛盾律的内容是在同一推理过程中，成矛盾关系或反对关系的两个判断，不能同真，必有一假。若已知其中一个为真，则可判断另一个必假。那么在（3）中所谓推出“矛盾”是指推出结果r与公理、定理、已知真命题之间的矛盾，这时r与公理、定理、已知真命题之间成立是矛盾关系或反对关系，故根据矛盾律必有r假。由“$p\wedge\bar{q}$”和“r假”这两个真判断出发，可推出$p\wedge\bar{q}$ 假。

排中律的内容是在同一推理过程中，成矛盾关系的两个判断，不能同假，必有一个真。若已知其中一个为假，则可判断另一个必真。由于$p\to q$和$p\wedge\bar{q}$是两个互为矛盾论题的判断，根据排中律，因$p\wedge\bar{q}$假，故必有$p\to q$真。

掌握了以上五种形式那么灵活运用反证法证明数学问题、根据问题的特征灵活选择相应的反证法形式也就有了保障。

运用反证法证明数学问题特别是反证法证明否定性命题时，否定性命题的结论往往是以否定的形式出现，如“ 不存在”、“ 不能表示为……”、“ 不等于…… ”、“ 不具有某种性质” 等，宜用反证法，有利于培养学生逆向思维的数学品质[5]。反证法证明这类命题时，通过否定给出命题，将原来的否定性命题转化为肯定命题，再加以利用，找出矛盾.首先是反设，肯定原命题的结论，然后将肯定后的结论作为已知条件，进行推理，可以从新结论与题设相矛盾方面、新结论与反设相矛盾方面、新结论与客观事实相矛盾方面（包括：与定义、公理、定理、法则、已知真命题相矛盾）、推理过程中的自相矛盾方面（包括：新结论与中间结论、临时假定之间的矛盾，证明中的自相矛盾等）导出矛盾，从而由所得矛盾肯定原结论成立。对于某些否定式命题，有时可用无穷递降法制造矛盾。做法是：假设结论反面为真，由此构造一个无穷递降过程。但从客观事实上看，这个过程应当是有限的，从而导致矛盾。

3.反证法证明命题的应用举例

（1）有些起始命题、基本命题、特殊命题，由于可以用到的定理、公式很少或不易找出直接排证的关系，用反证法有时会取得较好的效果。在学习“直线和平面平行的判定定理”时，应用反证法能取得很好效果。

例1：证明平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行[6]。

已知：a⊄α，b∈α，a∥b.求证：a∥α.

[分析]利用反证法证明，先否定结论再找出矛盾，注意要正确反设命题，尽快构成矛盾。

证法一：利用与公理4矛盾。

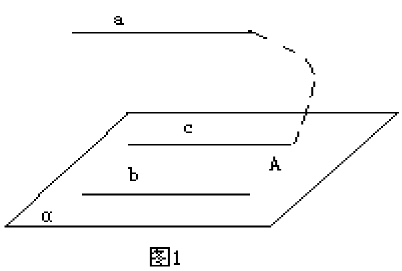

图1

如图1，∵a⊄α

∴a∥α或a∩α=A

若a∥α不成立，则a∩α=A。

由a∥b，知A不在直线b上，故可在α内过点A 作c∥b，根据公理4，得a∥c。这与a∩c=A矛盾。所以a∩α=A不可能，只能a∥α。

证法二：利用与已知矛盾。

假设直线a与平面α相交于A点，由a∥b知A不在b上，但在α上。

设平行直线a，b确定平面β，则b为α与β的交线，但平面α与β又有公共点A，必定还相交于A的另一条直线b’，这就与两平面相交只有一条交线相矛盾，所以a∥α。

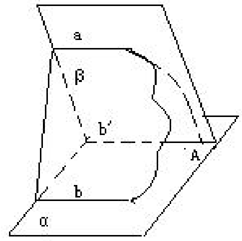

图2

证法三：利用与已知矛盾。

设平行直线a，b确定平面β，有a⊏β，α∩β=b.

若a∩α=A，则A∈α∩β=b，得A是a，b的公共点，这与a∥b矛盾，所以a∥α

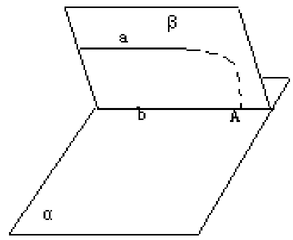

图3

证法四：与已知矛盾。

假设a与α相交于A由a∥b知A在直线b外，且在α内，直线b与A确定的平面就是α。

现在设平行直线a，b 确定了平面β，则a⊂β，b⊂β.但A在a上，从而A在β上，于是平面α和β有公共线b及b外的公共点A，由公理3推论1知，α和β是同一平面，从而a在α上，与已知a⊄α矛盾，所以a∥α。

例2：证明直线与平面平行[6]。

已知：a⊄α，且a∩α＝∅，求证：a∥α

[分析]：要证明直线与平面平行，就要证明它们没有公共点，即直线上无穷个点中没有一个在平面上，或者平面上无穷个点中没有一个在直线上，如何证明就不具体，因此我们考虑用反证法证明，通过否定反面来肯定正面.

证明：假设对于平面α存在点A，在直线a上，就否定了直线上没有一个点在平面α上.那么存在A∈α且A∈a 即a∩α＝A

这与已知a∩α＝∅相矛盾，所以点A不存在

即直线上无穷个点中没有一个在平面上，所以a∥α.

（2）有些命题的结论中含有“不”“无”（称为否定形式的命题）等，这种命题往往可以考虑反证法。

例3：求证不存在7条棱的多面体。

[分析]：要证明不存在这种多面体，考虑如果存在7条棱的多面体，只要符合多面体的条件就可以，如果不存在，那么一定会出现矛盾，就考虑用反证法来 证明。

证明：假设存在 7条棱的多面体。

首先，这个多面体的每一个面只能是三角形。

否则，若有四边形或边更多的多边形，那么除这些边外最多还剩下3条棱，就无法和4个以上的顶点连接了。如果这个各面都是三角形的多面体有m个面（m为整数），由于每条棱都是两个面的边，故3m/2=7，即m=14/3，与为m整数矛盾。所以不存在7条棱的多面体。

参考文献

[1]钱佩玲，邵光华.数学思想方法与中学数学[M].北京师范大学出版社，1999.139

[2]余四海，反证法对数学思维培养的作用[J].学科教育数学篇，2018（10）：69