浅谈圆锥曲线切点弦所过定点的特征

刘春玲

新疆乌鲁木齐八一中学　新疆　乌鲁木齐　830002

[摘　要]圆锥曲线的切点弦是高考中的一个考查内容，而其中有关圆的切点弦问题是必考内容，通过对圆的切点弦过定点特征的研究，进而推广到圆锥曲线切点弦所过定点的特征，达到对一类问题的归纳和总结。

[关键词]切点弦；定点

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2020.02.323

圆的切点弦是高考的必考内容之一，有关圆锥曲线的切点弦所在直线方程的研究已经比较多，本文主要通过对圆的切点弦过定点特征的研究，进而推广到圆锥曲线中一类特殊切点弦所过定点的特征，达到对此类问题的归纳和总结。

引题：已知圆 $C:x^2+y^2-6x-8y-5=0$ 和直线 $l:x+3y+15=0$，由直线l上的动点P引C的两条切线，若切点分别为A，B，则在直线AB上是否存在一个定点。若存在，求出该定点的坐标；若不存在，请说明理由。

解答：圆C：$x^2+y^2-6x-8y-5=0$　圆C与直线l相离.

设直线l上动点$P(m,n)$，

易得切点弦所在直线AB的方程为

$(m-3)x+(n-4)y-3m-4n-5=0$

又点$P(m,n)$在直线l上，则$m+3n+15=0$，即$m=-3n-15$，代入上式

得$(-3n-18)x+(n-4)y+9n+45-4n-5=0$，

即直线AB的方程为$18x+4y-40+n(3x-y-5)=0$

因为上式对任意n都成立，故$\begin{cases}3x-y-5=0\\18x+4y-40=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

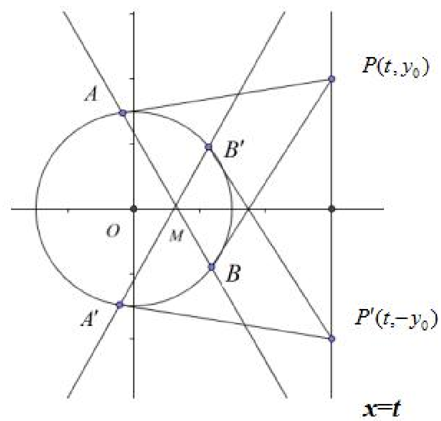
故在直线AB上存在一个定点，定点坐标为$(2,1)$

思考：1、当直线与圆相离时，过直线上任一点引圆切线必过定点吗？为什么？

2、若过定点，定点的位置有何特征？

探究1：不妨令直线$l:x=t(t>r)$. 圆$o:x^2+y^2=r^2(r>0)$. 直线l与x轴交于定点$(t,0)$. 如图，在直线$x=t$上，任取$P(t,y_0)$和$P'(t,-y_0)$，过点P引圆O的两条直线PA，PB，切点分别为A，B，直线AB与x轴交于点M. 过点P'引圆O的两条切线$P'A'$，$P'B'$，切点分别为A'，B'. 由对称性可知，直线$A'B'$过点M. 则切点弦所在直线必过定点，且定点为M。

探究2：易得切点弦所在直线AB的方程为$tx+y_0y=r^2$



令$y=0$，得$x=\dfrac{r^2}{t}$.

$\therefore M(\dfrac{r^2}{t},0)$，且$\overrightarrow{OM}=\dfrac{r^2}{t^2}\overrightarrow{OT}$

引题另法：圆心$C(3,4)$到直线$l:x+3y+15=0$的距离.

$$d=\frac{|3+3\times4+15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}.$$

过点$(3,4)$且与直线l垂直的直线为$3x-y-5=0$

由$\begin{cases}x+3y+15=0\\3x-y-5=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x=0\\y=-5\end{cases}$.

则过圆心C引直线l的垂线所得垂足为点$T(0,-5)$.

设定点$M(x,y)$，

则$\overrightarrow{CT}=\dfrac{(3\sqrt{10})^2}{30}\overrightarrow{CM}$.

$\therefore \begin{cases} -3=3(x-3) \\ -9=3(y-4) \end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

即得定点坐标为$(2,1)$.

引申1：已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，定直线 $x=t(t>a)$，过l上任一点$P(t,y_0)$引椭圆两条切线，切点分别为A，B，那么直线AB所过定点的位置是什么呢？

分析：定点必在x轴上，设点$M(x,y)$

切点弦直线AB方程为：$\dfrac{tx}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

令$y=0$，得$x=\dfrac{a^2}{t}$

$\therefore$定点为$M(\dfrac{a^2}{t},0)$，其中$t>a$，且$\dfrac{|OM|}{|OT|}=\dfrac{a^2}{t^2}$.

引申2：已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$. 定直线 $l:x=t(0<t<a)$，过l上任一点$P(t,y_0)$引曲线两条切线，切点分别为A，B，那么直线AB所过定点的位置是什么呢？

分析：定点必在x轴上，设点$M(x,y)$

直线AB方程为：$\dfrac{tx}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

令$y=0$，得$x=\dfrac{a^2}{t}$

$\therefore$定点为$M(\dfrac{a^2}{t},0)$，其中$0<t<a$，且$\dfrac{|OM|}{|OT|}=\dfrac{a^2}{t^2}$.

引申3：已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，定直线$l:x=t(t<0)$. 过l上任一点$P(t,y_0)$引曲线两条切线，切点分别为A，B，那么直线AB所过定点的位置是什么呢？

分析：定点必在x轴上，设点$M(x,y)$

直线AB方程为：$y_0y=p(x+t)$

令$y=0$，得$x=-t$

定点为$M(-t,0)$，其中$t<0$且$\dfrac{|OM|}{|OT|}=\dfrac{t^2}{t^2}=1$.

椭圆、双曲线和抛物线在高中阶段只研究标准方程，为探讨一类题的通性，所以本文中的直线也只研究了与X 轴垂直的情况，经过探讨，此类过圆锥曲线外定直线上动点所引圆锥曲线的切点弦不仅会过定点，而且定点的位置也有特征。对于直线与X 轴不垂直时，尤其是直线斜率非零的情况，虽然切点弦还会过定点，但不是由对称性确定，所以不能由以上结论得出。

参考文献

[1]《圆锥曲线与方程》教学探究[J].沈瑜.中学教学参考.2019（14）

[2]圆锥曲线中的切点弦及其方程[J].林国夫.数学通讯.2011（Z1）