

巧用对称性求圆锥曲线中直线过定点问题

刘春玲

新疆乌鲁木齐八一中学 新疆 乌鲁木齐 830002

[摘要]圆锥曲线中直线过定点的问题是高考常考内容, 本文通过对一道题中直线定点存在性的研究, 进而拓展到对一类可以利用对称性来求直线所过定点问题的归纳和总结。

[关键词]圆锥曲线; 定点; 对称性

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2020.02.348

对称性普遍存在于现实生活中, 而我们的数学中也有很多可以利用对称性来解决的问题。圆锥曲线中直线过定点的问题中也有可以利用对称性来研究的。本文就通过对一道题中直线过定点的研究, 达到对此类方法的归纳。

引题: 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$ 和直线 $l: x + 3y + 15 = 0$, 由直线 l 上的动点 P 引 C 的两条切线, 若切点分别为 A, B , 则在直线 AB 上是否存在一个定点。若存在, 求出该定点的坐标; 若不存在, 请说明理由。

解答: 圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$ 圆 C 与直线 l 相离。

设直线 l 上动点 $P(m, n)$,

易得切点弦所在直线 AB 的方程为 $(m-3)x + (n-4)y - 3m - 4n - 5 = 0$

又点 $P(m, n)$ 在直线 l 上, 则 $m + 3n + 15 = 0$, 即 $m = -3n - 15$, 代入上式

得 $(-3n-18)x + (n-4)y + 9n + 45 - 4n - 5 = 0$,

即直线 AB 的方程为 $18x + 4y - 40 + n(3x - y - 5) = 0$

因为上式对任意 n 都成立, 故 $\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 18x + 4y - 40 = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 。

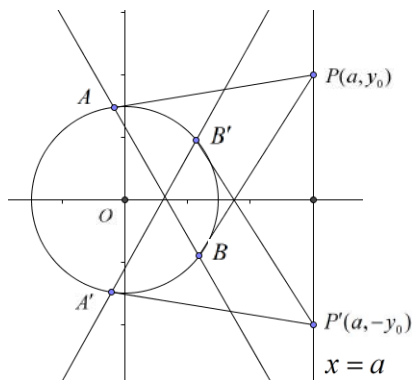
故在直线 AB 上存在一个定点, 定点坐标为 $(2, 1)$

思考: 1、当直线与圆相离时, 过直线上任一点引圆切线必过定点吗? 为什么?

2、若过定点, 定点坐标如何求?

探究1: 不妨令直线 $l: x = a (a > r)$. 圆 $o: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$. 直线 l 与 x 轴交于定点 $(a, 0)$. 如图, 在直线 $x = a$ 上, 任取 $P(a, y_0)$ 和 $P'(a, -y_0)$, 过点 P 引圆 o 的两条切线 PA, PB , 切点分别为 A, B , 直线 AB 与 x 轴交于点 M . 过点 P' 引圆 o 的两条切线 $P'A', P'B'$, 切点分别为 A', B' . 由对称性可知, 直线 $A'B'$ 过点 M . 则切点弦所在直线必过定点, 且定点为 M .

探究2: 易得切点弦所在直线 AB 的方程为 $tx + y_0y = r^2$



令 $y = 0$, 得 $x = \frac{r^2}{t} \therefore M(\frac{a^2}{t}, 0)$

引题另法:

过点 $(3, 4)$ 且与直线 l 垂直的直线为 $3x - y - 5 = 0$

由原法直线 AB 方程为 $18x + 4y - 40 + n(3x - y - 5) = 0$

因为上式对任意 n 都成立, 可取 $n = 0$ 由 $\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 18x + 4y - 40 = 0 \end{cases}$,

得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 。

故 $(2, 1)$ 为直线 AB 所过定点坐标。

通过上面的研究, 我们不仅可以利用对称性确定定点的存在, 而且可以很快求出定点的坐标。这种利用对称性求定点的问题还广泛存在于圆锥曲线的各类题目中。

应用1: 已知 A, B 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上两动点, F_1, F_2

分别为其左右焦点, 直线 AB 过右焦点, 已知点 P 为椭圆 C 的左顶点, 连接 PA 并延长交直线 $l: x = 4$ 于点 M . 求证: 直线 BM 过定点。

方法一: 由椭圆方程可知 $P(-2, 0), F_2(1, 0)$, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

设直线 $PA: x = m_1y - 2$, 由 $\begin{cases} x = m_1y - 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得

$(3m_1^2 + 4)y^2 - 12m_1y = 0$, 从而 $y_1 = \frac{12m_1}{3m_1^2 + 4}$,

$x_1 = m_1y_1 - 2 = \frac{6m_1^2 - 8}{3m_1^2 + 4}$, 即点 $A(\frac{6m_1^2 - 8}{3m_1^2 + 4}, \frac{12m_1}{3m_1^2 + 4})$

同理设直线 $PB: x = m_2y - 2$, 可得

$B(\frac{6m_2^2 - 8}{3m_2^2 + 4}, \frac{12m_2}{3m_2^2 + 4})$

由 A, F_2, B 三点共线可得 $k_{AF_2} = k_{BF_2}$, 即

$\frac{y_1}{x_1 - 1} = \frac{y_2}{x_2 - 1}$, 代入 A, B 两点坐标化简可得

$\frac{m_1}{m_1^2 - 4} = \frac{m_2}{m_2^2 - 4} \Rightarrow (m_1 - m_2)(m_1m_2 + 4) = 0 \Rightarrow m_1m_2 + 4 = 0$

直线 $l: x = 4$, 可得点 $M(4, \frac{6}{m_1})$, 即 $M(4, -\frac{3}{2}m_2)$

从而直线 BM 的方程为 $y = \frac{\frac{12m_2}{3m_2^2 + 4} + \frac{3}{2}m_2}{\frac{6m_2^2 - 8}{3m_2^2 + 4} - 4}(x - 4) - \frac{3}{2}m_2$

化简得 $y = -\frac{3}{4}m_2(x-4) - \frac{3}{2}m_2$, 即 $y = -\frac{3}{4}m_2(x-2)$,

从而直线 BM 过定点 $(2,0)$

方法二: 过右焦点 F_2 作直线 AB 关于 x 轴的对称直线, 连接 PA' , 并延长交直线 $l: x=4$ 于点 M' , 由椭圆的对称性易知, M 与 M' 关于 x 轴对称, 则直线 BM 所过定点在 x 轴上.

当直线 AB 斜率不存在时, $A(1, \frac{3}{2}), B(1, -\frac{3}{2})$.

\therefore 直线 PA 方程为 $x-2y+2=0$, 与直线 $l: x=4$ 交于点 $M(4,3)$

\therefore 直线 BM 方程为 $3x-2y-6=0$ 令 $y=0 \therefore x=2$

此时直线 BM 经过 x 轴上点 $T(2,0)$

设直线 $AB: x=1+my$ 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(4, y_0)$

$$\text{由 } \begin{cases} x=1+my \\ x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0$$

由题 $\Delta > 0$ 恒成立

$$y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2+4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2+4} \dots\dots\dots \ast$$

又直线 PM 方程为: $y = \frac{y_0}{6}(x+2)$

A 在直线 PM 上: $y_1 = \frac{y_0}{6}(x_1+2) \dots\dots\dots \textcircled{1}$

同理直线 TM 方程: $y = \frac{y_0}{2}(x-2)$

B 在直线 TM 上: $y_2 = \frac{y_0}{2}(x_2-2) \dots\dots\dots \textcircled{2}$

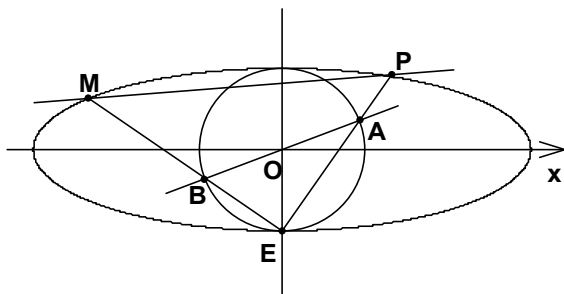
$\frac{y_1}{3} = \frac{x_1+2}{3(x_2-2)} = \frac{3+my_1}{3my_2-3}$
得 $y_2 = \frac{3+my_1}{3my_2-3}$
即 $y_1(3my_2-3) = (3+my_1)y_2$ 整理得 $2my_1y_2 = 3(y_1+y_2)$

即 $\frac{y_1+y_2}{y_1y_2} = \frac{2}{3}m$

由 \ast 知, $\frac{y_1+y_2}{y_1y_2} = \frac{-6m}{\frac{-9}{3m^2+4}} = \frac{2}{3}m$ 成立.

\therefore 直线 BM 所过定点为 $(2,0)$.

应用2: 如图, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 = 1$



, 椭圆 C_1 的下顶点为 E , 过坐标原点 且与坐标轴不重合的任意直线 l 与圆 C_2 相交于点 $A、B$.

直线 $EA、EB$ 分别与椭圆 C_1 相交于另一个交点为点 $P、M$. 求证: 直线 MP 经过一定点.

解答:

(i) 由题意知直线 PE, ME 的斜率存在且不为0, 设直线 PE 的斜率为 k , 则 $PE: y = kx-1$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx-1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{18k}{9k^2+1} \\ y = \frac{9k^2-1}{9k^2+1} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\therefore P(\frac{18k}{9k^2+1}, \frac{9k^2-1}{9k^2+1})$,

用 $\frac{1}{k}$ 去代 k , 得 $M(\frac{-18k}{k^2+9}, \frac{9-k^2}{k^2+9})$,

方法一: $k_{PM} = \frac{\frac{9k^2-1}{9k^2+1} - \frac{9-k^2}{k^2+9}}{\frac{18k}{9k^2+1} - \frac{-18k}{k^2+9}} = \frac{k^2-1}{10k}$

\therefore 直线 PM 的方程: $y - \frac{9-k^2}{k^2+9} = \frac{k^2-1}{10k}(x + \frac{18k}{k^2+9})$, 即 $y = \frac{k^2-1}{10k}x + \frac{4}{5}$,

\therefore 直线 PM 经过定点 $T(0, \frac{4}{5})$.

方法二: 作直线 l 关于 y 轴的对称直线 l' , 此时得到的点 $P'、M'$ 关于 y 轴对称, 则 PM 与 $P'M'$ 相交于 y 轴, 可知定点在 y 轴上,

当 $k=1$ 时, $P(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}), M(-\frac{9}{5}, \frac{4}{5})$, 此时直线 PM 经过 y 轴上的点 $T(0, \frac{4}{5})$,

$$\therefore k_{PT} = \frac{\frac{9k^2-1}{9k^2+1} - \frac{4}{5}}{\frac{18k}{9k^2+1}} = \frac{k^2-1}{10k}, k_{MT} = \frac{\frac{9-k^2}{k^2+9} - \frac{4}{5}}{\frac{-18k}{k^2+9}} = \frac{k^2-1}{10k}$$

$\therefore k_{PT} = k_{MT}, \therefore P、M、T$ 三点共线, 即直线 PM 经过点 T ,

\therefore 直线 PM 经过定点 $T(0, \frac{4}{5})$.

直线过定点的问题解法有很多, 但是此类利用对称性就可以判断定点的位置, 进而求出定点坐标的方法在高中阶段还是比较常见的, 同时这也是从特殊到一般数学思想的一种体现.

参考文献

[1] 用对称性求解圆锥曲线高考题[J]. 孔湛琦. 中学数学杂志. 2017 (11)

[2] 对称性情境高考试题的赏析[J]. 孙鹏伟, 同华杰. 中学物理教学参考. 2019 (26)