

关于实变函数课程教学的实践和探索

余保民

(渭南师范学院数学与统计学院 陕西 渭南 714000)

摘要《实变函数》是数学与应用数学专业的一门专业课程,其内容抽象,学习难度较大.根据实变函数的这些特点,结合作者的教学经验和教学实践,给出了实变函数教学中的一些教学建议,以促进学生的学习兴趣,增强学生的抽象思维能力,提高教学效果.

关键词实变函数;教学设计;教学效果

作为数学各专业的专业必修课程,《实变函数》一方面是数学分析内容的进一步深化和延续,另一方面是学生进一步学习泛函分析、调和分析、概率论、微分方程等课程的基础,因此,讲好、学好实变函数课程具有重要的意义.由于实变函数的内容涉及集合理论, n 维欧氏空间上的点集理论,测度理论,可测函数理论,以及Lebesgue积分理论众多内容,同时内容又具有高度的抽象性,因此是一门公认的难学的课程.因此,在实变函数的教学中,如何激发学生的学习热情,提高学生的学习水平和学习效果,是一个值得思考的问题.本文中,笔者将根据自己多年来从事实变函数教学的教学经历和实践,从三个方面来阐述我们在实变函数教学中的实践.

一、讲清课程的脉络和知识框架

由于实变函数涉及集合理论、 n 维欧氏空间上的点集理论、测度理论、可测函数理论、Lebesgue积分理论等众多内容,部分学生即使在学完这门课程以后都没有搞清楚整个课程的体系,不清楚各部分内容之间的联系及在整个课程中的地位,更不用说去学习和掌握好实变函数的内容了.

在教学实践中,我们会在每一节课从定义在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f 的Riemann积分谈起,首先回顾Riemann积分的主要思想是“分割、近似求和,取极限”,其中分割是把区间 $[a,b]$ 分割成小区间.然后回顾Riemann可积的充要条件,由此出发,主要从Riemann积分包含的可积函数类过小,以及Riemann积分在处理积分和极限交换运算次序的问题上要求强两方面介绍Riemann积分所存在的不足和缺陷.在此基础上,介绍法国数学家Lebesgue在20世纪初引入的后来以他名字命名的Lebesgue积分.这种积分的主要目的是为克服Riemann积分的缺陷而引入的.其主要思想也是分割、近似求和、取极限.不同的是,Lebesgue积分的分割是从分割函数 f 的值域入手得到 f 的定义域的分割.这一个看似小的改动却带来了很多问题:对定义域分割得到的小集合不再是区间,这种集合是否有“长度”?如何定义其“长度”?哪些函数对在这种任意的分割后得到的集合都有“长度”?对于这种分割后集合都有“长度”的函数,其积分是否克服了Riemann积分的缺陷?

为了回答这些问题,自然地先要研究集合论和 n 维欧氏空间上的点集理论,然后再去研究点集的“长度”——测度理论,进一步再去研究可测函数理论,最后引入Lebesgue积分并研究其性质.

通过这样的介绍,就为学生在宏观上搭建起了实变函数的整个框架体系,使学生在学习实变函数的具体内容时清楚自己要学习什么.

二、直观和抽象相结合,增加学生的理解能力和抽象思维能力

实变函数的内容高度抽象,理论性强,这就导致学生在初次接触实变函数的内容时感觉难度很大,有时甚至不能完全理解所讲的内容.因此,在教学中,笔者尽量把所讲的内容进行直观化,促进学生的理解.但直观化的目的是让学生更好的理解所讲授的内容,如何在直观化的基础上提高学生的总结和抽象思维能力?以可数集合这一节内容为例,我们在教学中做了如下的尝试,取得了较好的教学效果.

按照定义,一个集合 A 称为可数集合,是指集合 A 和全体正整数所成集合 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ 对等,即存在一个双射 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$.由于去寻找两个集合之间的双射并不容易,因此在证明一个集合是可数集时,一般的方法是先证明“集合 A 是可数集合的充分必要条件是 A 的元素可以排成一个无穷序列”;然后再想办法把 A 的元素排成一个无穷序列来证明 A 是可数集合.在文[1]中,给出了如下的一个可数集合及其证明.

例1 集合 $\mathbb{N}^2 = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{N}\}$ 为可数集合.

证明 因为

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^2 &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(m, n) | m, n \in \mathbb{N}, i+j = k-1\} \\ &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), \dots\}, \end{aligned}$$

所以 \mathbb{N}^2 是可数集合.

上面的证明方法比较直观,学生也比较容易理解.如果教师到此为止,继续其他内容的讲解,则学生往往只能是惊叹于上述方法的巧妙,以及知道 \mathbb{N}^2 是一个可数集合而已.在教学过程中,笔者作了如下的教学设计:

在讲解完上面的证明后,教师紧接着向学生提出下面的问题:“对于 \mathbb{N}^2 中的任意给一个给定的元素 (i, j) ,经过这样的排列后,其所在位置 $f(i, j)$ 是什么?”并留给学生一到两分钟的时间进行思考.大部分学生对于这一问题并不能给出答案.接着,教师给出如下的提示:把 \mathbb{N}^2 中的元素排成如下的无穷行无穷列的矩阵

$$\begin{array}{ccccccc} (0, 0) & (0, 1) & (0, 2) & (0, 3) & \dots & & \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\ (1, 0) & (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots & & \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\ (2, 0) & (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots & & \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\ (3, 0) & (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \dots & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

并按箭头所给的线段画出对角线.经过这样的提示,学生基本上都能够看出例1中元素的排列方式就是把矩阵中的元素按所在的对角线从左上角往右下角依次排列,对同一对角线上的元素按箭头所指的顺序进行排列.但是这时学生一般还是不能写出 $f(i, j)$ 的具体表达式.这时,教师可以进一步给出提示:把图中的对角线由左上角开始从1开始顺序编号,然后观察每一条对角线上的元素个数以及元素 (i, j) 的行坐标 i 和列坐标 j 与对角线的编号 k 的关系是什么?学生经过思考,会得到如下结果:第 k 条对角线上恰好有 k 个元素;元素 (i, j) 在第 k 条对角线上且仅当 $i+j+1=k$ 且 $0 \leq i, j \leq k-1$.经过这个过程后,部分学生已经能够总结出:在排列元素 (i, j) 时,先要把 (i, j) 所在对角线前面的第1, 2, \dots , $i+j$ 条对角线上的元素排列完,即先要排完 $1+2+\dots+(i+j)$ 个元素,然后再排列 (i, j) 所在对角线上的元素,而在排列 (i, j) 所在对角线上的元素时, (i, j) 排在第 $i+1$ 位.因此,最终得到

$$f(i, j) = 1 + 2 + \dots + (i+j) + (i+1) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i + 1$$

最后,教师给出总结,上面所得的 $f(i, j)$ 正是集合 \mathbb{N}^2 到 \mathbb{Z}^+ 的一个双射.经过这样的讨论和讲授,不但可以使学生对可数集合概念的有了深入理解,而且培养了学生的抽象思维能力.

三、增加学生的参与性,调动学生的学习兴趣

实变函数的内容基本上是一系列的定义,命题,定理和推广构成的,理论性很强,如果不经仔细地教学设计,教学往往变成“填鸭式”教学过程,激不起学生的学习兴趣,甚至让学生产生厌学的心理.因此,在讲授实变函数时,教师不仅要熟悉实变函数的知识体系,而且要对教学过程进行精心设计,增加学生的参与性,激发学生的学习兴趣.

以讲授“直线上开集的构造”为例,我们在课堂的导入阶段,先让四到五位学生在黑板上随意写出一个直线上的开集.一般情况下,除了空集和整条直线 \mathbb{R} 以外,学生写的集合都会是一个开区间.然后我们会向学生提问:“谁能够写出不同的开集?”这时部分学生会写出二个或三个开区间的并集.继续这种提问两到三次后,学生们会发现自己所写出的开集都是开区间或几个开区间的并集.此时,我们会对此做出总结:“同学们所写的开集都是开区间或开区间的并集.在写成开区间的并集时,有些同学所写的开区间有公共点,实际上这些开区间可以合并成一个开区间,因此,最终的结果可以表达成一些不相交的开区间的并集,并且这些互不

相交的开区间的个数可以是8个、10个、任意有限多个。另外，一列（可数多个）不相交的开区间的并集也是开集。那么，除此之外，大家还能不能写出其他形式的开集呢？”学生这时都会去考虑这个问题。给出学生一分钟左右的思考时间后，我们会引入这节课的内容：“这节课我们来证明，直线上的开集只能写成这种形式，即直线上的非空开集，或者是整条直线，或者是有限多个或可数多个互不相交的开区间的并集。”通过这样的教学设计，提高了学生课堂的参与程度，促进了学生对所学内容的思考，调动了学生的学习积极性。

以上是笔者在实变函数课程的教学中所做的一些尝试和探索，目的是通过精心的教学设计，增强学生在教学中的参与性，促进学生的学习兴趣，提高学生的抽象思维能力，为学生学好这门课程打好坚实的基础。

智能汽车发展面临的挑战及优势浅析

吴建兴 江莉莉 马明越

（中北大学 山西 朔州 036000）

摘要随着时代的高速发展，大家对出行方面提出了更加严格的需求，伴随着大数据，互联网技术的急速发展，智能汽车也在风口浪尖之上，我国身为一个工业大国，中国的智能汽车发展必定面临挑战和机遇。一方面，智能化汽车的发展对人们生活带来了极大的便利，而且会促进人们生产生活地发展。另一方面，智能汽车地发展需要多个领域共同合作，取得理想的成就。由此可见，智能汽车，这个综合地高新技术领域的发展顺应时代潮流，汽车市场未来将由智能汽车所占有，谁先发展好智能化汽车，谁就将会占有大部分汽车市场。

关键词智能汽车；发展研究；人工智能

1 引言

智能汽车在德日美英等国的发展较早，在许多技术领域值得我国借鉴学习，尤其是美国在人工智能方面在很早之前便被提出，在20世纪50年代，美国达特茅斯大学首次提出“人工智能”，在此之后，人工智能使美国在人工智能的基础研究中处于世界领先水平。联邦政府多年来对人工智能的长期持续投资，是美国在人工智能基础领域底蕴更加深厚，创新方向多元化致使美国General Motors等汽车龙头企业，积极开发，引领智能汽车行业的发展。

2 我国智能汽车发展背景

有关资料显示，我国今年上半年产销量高达一千多万辆，远超美国等发达国家。自改革开放以来，中国的汽车制造业急速崛起，而且随着网络发展日新月异，中国的智能汽车在其中也获得了很大红利及优势，但同时也伴随着诸多的抑制条件，智能汽车的发展不仅是使中国在汽车工业领域发生了翻天覆地的变化的改革，还会在全球还会掀起新的风雨，与此同时，中国也将面临巨大的挑战。

中国汽车工业协会副会长秘书柳燕于中国首届智能汽车创新发展高峰论坛中表示：为了开拓汽车产业全球化新局面，将我国汽车市场在国际上快速打开，就要掌握智能汽车领域的核心科技，在智能网联汽车的制高点上插上五星红旗，既是汽车强国战略的重要支持，也是中国汽车在新四化趋势下成为全球汽车产业引领者的新机遇。并表示，中汽协会将在未来继续致力于发挥行业组织的作用，同政府、企业一起，在未来5年的战略机遇期中，规划出合理而完美的发展蓝图，在危机中重获新机，带领建设发展汽车大国市场。

3 智能汽车发展的制约因素

3.1 缺少核心的技术支持

中国制造技术发展时间同其他机械大国相比过于短暂，而中国汽车制造并没有能力去完全独立制造一些核心的机械零件，以至于在汽车核心构建要从技术先进的大国进口，这一条件限制了我国汽车制造业的发展，同时也在制约着中国智能汽车的发展，此外国际许多的车企都存在这三十年以上的辅助驾驶技术的研究，而中国则刚起步不久。

3.2 国家没有对智能汽车有相关法律法规

中国许多工业标准都是从国外学习而来的，具备一定的指导作用，但是缺少针对本土做出具体的改造。以至于在缺少国家统一标准的条件下，各家车企只能“闭门造车”，另外在法律法规约束上，中国对智能汽车在路面行驶也缺乏者之对应的法律法规，以至于在没有约束的智能汽车在人们心中并不对其看好，致使智能汽车缓慢发展。

3.3 智能汽车在使用安全上的隐患

智能汽车目前面临的最大的也是被人关注的问题则是网络安全问题，智能汽车需要互联网以及大数据等技术综合技术应用，才能使其达到预期效果，但在过去互联网领域中出现的网络安全问题也开始成为汽车智能化一个巨大的阻碍，而且此问题则需要整车制造企业，网络运营商和服务业等共同解决，仅凭一家之力解决问题是不理想的。这需要全国各大领域共同努力，这种形式在我国发展还是比较难的，所以中国的汽车智能化还有许多路要走。

3.4 智能汽车在路途行驶过程所会遇到的问题

想要确保智能汽车在行驶过程中的安全性、可靠性，就离不开对周边环境以及汽车现状消息状况的获取，在多年以来，汽车传感器技术十分先进，但依旧没有一

参考文献

[1]程其襄,张奠宙,胡善文,薛以锋.实变函数与泛函分析基础[M].北京:高等教育出版社,2019.

[2]曹怀信.实变函数引论[M].西安:陕西师范大学出版社,2010.

基金项目:渭南师范学院科研项目(2018SKYM35);渭南师范学院自然科学院科研项目(18YKS10)。

作者简介:

余保民(1973-),男,汉族,陕西富平人,硕士,副教授,主要从事代数理论论研究。

种传感器可以在不间断的获取车辆运行信息。在此条件下,诸多学者提出了多路传感技术,此技术应用了各类传感器的互补性,通过相互“交流”获得最为完整的信息,并避免了过多传感器而产生的信息冗余状况,但是这种技术在较为偏远且路况不好的路上是无法完全值得以来的。

4 智能汽车发展的优势

4.1 智能汽车发展的强大的科学技术支持

随着时代的不断变迁,我国紧跟时代,大力发展通信以致5G的率先运行,这为智能汽车的发展,带来了无比的便利,智能汽车可以充分发挥5G的低延迟性,并且我国北斗卫星导航系统也为智能汽车在道路识别方向上带来了优势,随着北斗导航的不断发展,可以将车辆的位置以及路况完全的呈现给大数据,大大的推动了汽车智能化的发展。

4.2 国家大力支持,具有强大的国内市场

智能汽车的出现,不仅对汽车制造企业带来经济利益而且对网络运营商,服务运营商也会带来不菲的经济利益,以至国家大力支持支持智能汽车的创新,此外,我国产销量连续十年蝉联全球第一,这不仅给我国带来了广阔的国内市场,并且可以为智能汽车的发展带来无限的实验基础,此外,我国每年都会举办“全国大学生智能汽车比赛”,这为中国智能汽车的发展打下了坚实的基础以及为智能汽车发展带来了新血液。

4.3 智能汽车所带来的舒适性

在路途中,对于驾驶员以及其他乘客来说是一个枯燥无味的过程,而智能汽车可以是驾驶员以及其他乘客道路上安全地行驶中保持愉悦的心情,而且在漫长地路途中享受现代化的智能服务,并且让驾驶员可以在疲劳时开启自动驾驶,缓解疲劳的同时继续前往目的地。此外,驾驶员在室外休息时,不用担心由于汽车内部不利于休息的环境而带来的隐患,只要开启智能模式,将会给驾驶员创造出一个放松的环境,与此同时,也可以放心地将孩童独自留在车中而不担心。

4.4 智能汽车在特殊情况的高智能化处理

随着我国对汽车智能化的安全的高度要求,各大汽车制造企业将会为应对各种紧急情况而进行处理,使智能化完全地应用在汽车安全保障中。且智能汽车的出现可以在远程操控汽车的运行,极大的方便地了解汽车现状,以及在车辆驾驶时出现突发情况(雾,霾,暴雨,沙尘,落水),智能汽车将会自动开启防护功能,大大保障了车内人员的安全。尤其专用汽车的使用,智能化汽车将会大展风采。

5 结束语

伴随着科学技术的高速发展,一句时代智能化的趋势愈发明显,人们对智能汽车技术的研究与应用只会不断地深入。一方面,智能化汽车的发展对人们生活带来了极大的便利,而且会促进人们生产生活地发展。另一方面,智能汽车地发展需要多个领域共同合作,取得理想的成就。由此可见,智能汽车,这个综合地高新技术领域的发展顺应时代潮流,汽车市场未来将由智能汽车所占有,谁先发展好智能化汽车,谁就将会占有大部分汽车市场。

参考文献

[1]谭晶宝.智能汽车新蓝图[J].汽车观察,2020(03):84-87.

[2]张龙泳.浅析智能汽车和智能汽车操作应用[J].工业设计,2017(10):62-63.