几何视角下行列式的教学研究

李晓辉 梁 岩 梁海鹏

（石家庄理工职业学院 河北 石家庄 050228）

[摘 要]本文从几何的角度来研究行列式。提出了二阶、三阶行列式在几何上的表示，并将此结论推广到了n阶行列式。实现了代数与几何有效结合，并通过实例展示了利用代数来解决某些几何问题大大减少了其难度。

[关键词]行列式几何意义；向量积；混合积

行列式是高等代数和线性代数中的一个非常重要的内容。在实际授课中，我们往往是通过二元一次方程组来引入二阶行列式，从而引出三阶行列式乃至n阶行列式的定义。学过行列式之后，我们会计算各式各样的行列式，那么行列式在几何上表示的是什么呢？

一、行列式的定义

定义：设有n^2个数，排成n行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的n个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \qquad (1)$$

的项，其中$p_1, p_2, ... p_n$为自然数1, 2, ..., n的一个排列，t为这个排列的逆序数。由于这样的排列有n!个，所以形如（1）式的项共有n!项，我们把所有这n!项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用上述定义，可以得到对于二阶行列式来说，其计算公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

对于三阶行列式来说，其计算公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

二、几何视角下的行列式

（一）二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

在二维空间中，取向量$\vec{a}_1=(a_{11},a_{12}),\vec{a}_2=(a_{21},a_{22})$，

（i）若向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2$不共线，则以向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2$为邻边的平行四边形面积为

$$S=|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|\cdot\sin\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle \qquad (2)$$

由向量内积的定义我们可以得到

$$\cos\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle=\frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}$$

而向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2$的范围为(0, π)，所以$\sin\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle>0$，因此有

$$\sin\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}\right)^2}=\frac{|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}$$

故（2）式可化为$S=|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|\cdot\sin\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$，我们可以看出二阶行列式在几何上表示的是以它的行向量为邻边的平行四边形的有向面积。

（ii）若向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2$共线，则以向量$\vec{a}_1,\vec{a}_2$为邻边的平行四边形是不存在的，此时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$

（二）三阶行列式

在分析三阶行列式几何意义之前，我们先给出三维向量的向量积与混合积的概念。

定义：（向量的向量积）向量$\vec{c}$的模$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，$\vec{c}$的方向垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$所确定的平面，$\vec{c}$的指向按右手规则从$\vec{a}$转向$\vec{b}$来确定，那么向量$\vec{c}$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，记作$\vec{a}\times\vec{b}$，即

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

定义：（向量的混合积）已知三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$，如果先作$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}$，把所得到的向量与第三个向量$\vec{c}$再作数量积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，这样得到的数量叫做这三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$的混合积，记作$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

在三维空间中，取$\vec{a}_1=(a_{11},a_{12},a_{13}),\vec{a}_2=(a_{21},a_{22},a_{23}),\vec{a}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$，则有：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\\&=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\\&=\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\end{aligned}$$

我们可以看出三阶行列式在几何上表示的是以它的行向量为邻边的平行六面体的有向体积。即以行列式的第二行和第三行为底，以第一行为侧棱的平行六面体的有向体积。当行列式值为正时，表示$\vec{a}_1$与$\vec{a}_2\times\vec{a}_3$在$\vec{a}_2$与$\vec{a}_3$所张成平面的同一侧；当行列式值为负时，表示$\vec{a}_1$与$\vec{a}_2\times\vec{a}_3$在$\vec{a}_2$与$\vec{a}_3$所张成平面的异侧。

（3）n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

依此类推，一个n阶行列式可以看成是n-1个n维向量的向量积再与另一个向量的数量积得到。n阶行列式的几何意义是以各行为棱的n维立体的有向体积。

三、应用举例

例 已知不在一平面上的四点：$A(1,2,4),B(2,5,6),C(0,1,9),D(-1,2,7)$，求四面体ABCD的体积。

解：由立体几何的知识可知，四面体ABCD的体积V等于以向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一，因此

$$V=\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{AC}\;\overrightarrow{AD}]$$

由于$\overrightarrow{AB}=(1,3,2),\overrightarrow{AC}=(-1,-1,5),\overrightarrow{AD}=(-2,0,3)$，

而$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-28$，所以$V=\frac{14}{3}$

因此，四面体ABCD的体积为$\frac{14}{3}$.

参考文献

[1]同济大学数学系编，高等数学（第六版）.高等教育出版社.2007

[2]陈志彬，张爱平，李强，行列式几何化的教学研究.当代教育理论与实践.2012.4

[3]陈秀梅，高等代数教学中行列式几何意义的思考.高教视野.2018.7

[4]同济大学数学系编，工程数学线性代数（第五版）.高等教育出版社.2007

作者简介：

李晓辉（1984-），女，讲师，硕士，研究方向为计算数学，多年来从事数学在各个领域的应用研究。