

物理最值问题的数学方法

左 奕

(贵州师范大学附属中学物理组 贵州 贵阳 550001)

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2020.06.1078

在物理习题中常会遇见求最大值和最小值的问题，而对这类习题的求解学生常感困难。为此，本文拟从以下几个方面介绍物理最值问题的常用解法，旨在培养学生运用数学方法解决物理问题的科学素养。

一、应用配方法求最值

根据一元二次方程 $y = ax^2 + bx + c$ ，配方变成 $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，当 $a > 0$ 时， y 取最小值；当 $a < 0$ 时， y 取最大值。

例1：已知电源的电动势为 E ，内阻为 r ，试求该电源输出最大功率的条件。

解：由闭合电路欧姆定律可知 $I = \frac{E}{R+r}$ ；

$$输出功率 P = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}；$$

因为 $(R+r)^2 = (R-r)^2 + 4Rr$ ；

$$所以 P = \frac{E^2 R}{(R-r)^2 + 4Rr} = \frac{E^2}{\frac{(R-r)^2}{R} + 4r}；$$

当 $R-r=0$ 时，即 $R=r$ 时，输出功率有最大值，且 $P_{max} = \frac{E^2}{4r}$ 。

二、应用三角公式求最值

1、应用三角公式 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi)$ 求最值

例2：重为 G 的物体与水平地面的滑动摩擦系数为 μ ，欲以一个最小的拉力 F 使物体沿水平地面匀速前行，这个最小拉力是多大？

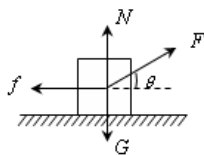


图 1

解：物体受力情况如图1所示。由于物体匀速运动，根据平衡条件可得：

$$F \cos \theta = \mu(G - F \sin \theta)；$$

$$所以 F = \frac{\mu G}{\cos \theta + \mu \sin \theta} = \frac{\mu G}{\sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta + \varphi)}；$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{\mu}；$$

可见 $\theta + \varphi = 90^\circ$ 时， F 有最小值，且 $F_{min} = \frac{\mu G}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ 。

2、应用三角公式 $2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \sin 2\theta$ 求最值

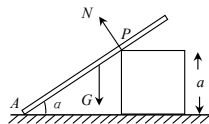


图 2

例3：如图2所示，质量均匀，粗细相同的光滑直棒长为 L ，重为 G ，一端与固定轴 A 相连，可绕轴无摩擦转动，棒搁在边长为 a 的立方体上 ($a < \frac{\sqrt{2}}{2}L$)，立方体静止在水平地面上。当棒与立方体接触的点 P 在棒上距 A 的距离 AP 为多少时，棒对立方体的压力最大？

解：棒的受力情况如图2所示，由平衡条件得：

$$G \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha = N \cdot \frac{a}{\sin \alpha}；$$

$$所以 N = \frac{G \cdot L}{2a} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{G \cdot L}{4a} \cdot \sin 2\alpha；$$

可见只有当 $2\alpha = 90^\circ$ 即 $\alpha = 45^\circ$ 时，才有最大值，且 $N_{max} = \frac{GL}{4a}$ 。

三、应用定和求积和定积和定理求最值

1、定理一：若两个正数之和为一常数，则当两数相等时，其积最大。

例4：图3所示电路，电源电动势 $E=12V$ ，内阻 $r=0.5 \Omega$ ， $R_1=2 \Omega$ ， $R_2=3 \Omega$ ， R_3 为滑动变阻器，其总阻值为 5Ω 。问：滑动触头在何处时，干路中电流最小，最小值为多大？

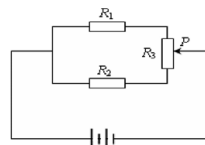


图 3

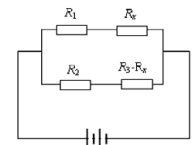


图 4

解：设滑动变阻器触头上边电阻为 R_x ，等效电路如图4所示，外电阻为 $R = \frac{(R_1 + R_x)(R_2 + R_3 - R_x)}{R_1 + R_x + R_2 + R_3 - R_x} = \frac{(R_1 + R_x)(R_2 + R_3 - R_x)}{R_1 + R_2 + R_3}$ ；

因为上式分母为定值，当分子最大时， R 有最大值，此时干路中电流最小。

由于 $(R_1 + R_x)$ 与 $(R_2 + R_3 - R_x)$ 之和为定值，则当 $R_1 + R_x = R_2 + R_3 - R_x$ 时，其积 $(R_1 + R_x)(R_2 + R_3 - R_x)$ 最大。所以

$$R_x = \frac{R_2 + R_3 - R_1}{2} = 3 \Omega，即滑动触头上边的电阻为 3Ω 时， R 值最大，其值为$$

$$R_{max} = \frac{(R_1 + R_x)(R_2 + R_3 - R_x)}{R_1 + R_2 + R_3} = 2.5 \Omega；$$

此时干路中电流最小，其值为

$$I_{min} = \frac{E}{R_{max} + r} = 4 A；$$

2、定理二：若两个正数之积为一常数，则当两数相等时，它们的和最小。

例5：如图5所示，一杠杆每单位长重 $G_0=10N/m$ ， A 端为支点，施力于 B 端，现提起重物 $P=200N$ ，使杠杆水平，重物到支点 A 的距离 $a=0.1m$ 。问杠杆多长时，在 B 端所用的力 F 最小？

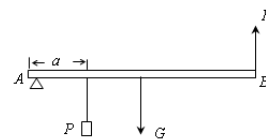


图 5

解：棒的受力情况如图5所示，设杆长为 L ，则杆重 $G = G_0 \cdot L$ ，由平衡条件得：

$$FL = P \cdot a + G_0 \cdot L \cdot \frac{L}{2}；$$

$$所以 F = \frac{P \cdot a}{L} + \frac{G_0 \cdot L}{2}。$$

因 $\frac{P \cdot a}{L} \cdot \frac{G_0 \cdot L}{2} = \frac{PaG_0}{2}$ 为一定值，当 $\frac{P \cdot a}{L} = \frac{G_0 \cdot L}{2}$ 时， F 有最小值，所以

$$L = \sqrt{\frac{2Pa}{G_0}} = 2m；则$$

$$F_{min} = \frac{P \cdot a}{L} + \frac{G_0 \cdot L}{2} = 20N。$$

四、利用 $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} (x_i > 0)$ 求最值

例6：如图6所示，细线上拴一小球，从水平位置向竖直位置运动的过程中，其竖直方向的分速度开始逐渐增大，然后逐渐减小。试计算摆线与竖直方向成多大角

度时, 小球获得最大的竖直分速度?

解: 设摆线与竖直方向成 θ 角时, 小球获得的竖直分速度 v_y 最大 (如图6)。根据机械能守恒定律可得

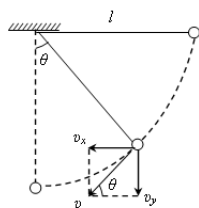


图 6

$$mgl \cos \theta = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_y}{\sin \theta}\right)^2;$$

$$\text{所以 } v_y = \sqrt{2gl \cos \theta \cdot \sin^2 \theta}.$$

下面只需求 $y = \cos \theta \cdot \sin^2 \theta$ 的最大值即可。

因为 $y = \cos \theta \cdot \sin^2 \theta$;

$$\text{所以 } y^2 = \cos^2 \theta \cdot \sin^4 \theta = \frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta \cdot \sin^4 \theta)$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \theta) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{3}\right)^3$$

由上式可知, 当且仅当 $2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$, 即时 $\theta = \arctan \sqrt{2}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), y^2 取最大值。

所以当摆线与竖直方向成 $\theta = \arctan \sqrt{2}$ 时, 小球获得最大竖直分速度。

作者简介:

左奕, 男, 汉, 1967年11月生, 安徽省庐江县人, 本科, 中学物理高级教师, 研究方向: 从事高中物理教学工作三十余年。

学科素养下的导学案教学的探索实践与反思

刘英华

(吉林省长春市第二实验中学 吉林 长春 130000)

【摘要】导学案是指导学生自主学习的方案, 在充分尊重学生主体地位的前提下, 积极发挥教师的主导作用, 通过科学有效的训练, 达到课堂教学效益的最大化。本文主要概述了导学案教学的实践与反思, 来达到学生寻找解决问题的方法和途径。

【关键词】学科素养; 导学案; 探索实践; 反思

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2020.06.1079

一、导学案教学的探索

(一) 什么是导学案

导学案是用于指导学生自主学习、主动参与、合作探究、优化发展的学习方案。它既体现了教师的导, 也体现了学生的学。它是教师集体研究、个人备课、再集体研讨制定, 以新课程标准为指导、以素质教育要求为目标。导学案以学生为本, 使学生学会学习、学会创新、自主发展。在充分尊重学生主体地位的前提下, 积极发挥教师的主导作用, 通过科学有效的训练, 达到课堂教学效益的最大化。

(二) 导学案的设计理念

导学案设计要遵循学生的学习规律, 充分体现课前、课中、课后的发展和联系: 课前预习导学—课堂学习研讨—课堂检测评估—课后拓展延伸, 在先学后教的基础上实现教与学的最佳结合。让每一位学生感受到: 这一项项的目标任务, 我会做了, 我学会了, 我能够灵活运用它了。原来, 这节课不难呀! 久而久之, 学生的自信有了, 既掌握了行之有效的学习方法, 也培养了学习兴趣。

(三) 导学案教学带来的好处

- 1、教师的变化: 教师的观念和教学方式发生了很大的变化, 课堂不再沉闷, 师生互动, 生生互动随时可见。真正的将课堂交给了学生。
- 2、学生有了大的变化: 实施“学案导学”, 学生成了课堂的主人, 有学案的引领, 学生能目标明确地学, 积极主动地学, 高效率地学, 明明白白地学, 学生变得乐学。
- 3、课堂上发生的变化: 实施高效课堂“导学案”模式真正体现了学生的学习方式, 是“导学”而不是“逼学”。它一改过去学生“要我学”的被动学习模式, 变为“我要学”的自主学习方式, 使学生成为课堂的主人, 真正实施课堂教学的高效性。

二、导学案教学的实践

我们在设计导学案时按照以下几个步骤进行操作:

(一) Before Class:

课前部分应是学生根据自己的学习水平自主复习建构知识, 确定个性化学习方式方法, 为学习进行必要的知识储备。导学案应鼓励学生学习方式的多样化和学生动手、参与。从而使其成为学生掌握学科知识体系和学科学习方式的载体、教师教学的基本依据和学生自主学习建构知识的过程。下面以人教版Go for it 八年级上 Unit 9 Section A 1a-2c为例展示导学案的课前准备环节:

教师准备:

1. 在分析教材、班级学情、自身风格等因素的基础上制定的可供学生自主选择的学案, 其中包括不同的学习目标、活动方式、评价方式等, 还应包括用于巩固所学的基础练习和拓展练习。

2. 提前查阅好关于三位伟人的信息, 及制作好相应课件。

学生准备:

1. 利用网络等手段查阅关于课本中将要出现的三位伟人及你最喜欢的一位名人的信息包括职业、出生地、性格特征、成就等。(总体要求)

2. 复习学过的过去式表达, 并在此基础上预习新课完成以下内容。(先独立完成, 不会的合作交流一下)

A) 单词“大通关”

本课出现的表示职业的单词: _____ 此外我还学过

本课出现的表示性格特点的形容词: _____ 此外我还学过

B教师在新授课前, 关注指导学生对已有知识储备加以整理, 既有利于培养学生随时归纳总结知识的好习惯, 又有利于教师在新授课环节以旧带新, 为导入新课搭建台阶, 同时老师要求学生把不会读的单词写下, 增强学生带着问题听新课的效果。养成预习好习惯的学生在今后的学习生活中将会受益匪浅。

(二) In Class:

在课中部分我们遵循了下面几个步骤, 也可以根据具体情况灵活调整。

1、针对预习情况检查(师生互问探讨, 从提问质疑到释疑解惑, 进行重难点点拨, 重在合作探究、启发引导)

2、展示导学案上的知识。把导学案上的知识部分依次让学生展示出来。如谁能把单词A-----B标准地读出并书写出来、谁能把对话中的短语写出来、谁能分析某个句子的结构、谁能讲解某一时态、谁能根据某某的内容总结出规律。这个过程也是对学生学习策略的培养(主要是学习方法交流、调整等)

3、能力训练(包括听力、口语训练, 合作编演会话, 说一段连贯的话或进行书面表达, 培养学生的综合语言运用能力)

4、情感体验交流(如情境表演和体验, 穿插思想教育等, 创设和谐的英语语言氛围) 5、当堂达标测试(分课型: 口语交际或基础训练) 6、当堂反馈小结(如学习评价, 讨论升华等, 画龙点睛)

(三) After Class:

课后是为学生的学习活动提供及时的反馈和评价。重点起到查漏补缺的作用。同时也让学生对自己的学习负起责任, 学生明确已经掌握的知识对他们也是一种激励。

三、导学案教学的反思

(一) 导学案教学要真正做到低负高效。导学案导学要实施堂堂清。导学案是根据课程标准和具体的学习目标设计, 已涵盖了“三维目标”的基本要求, 学生通过导学案进行必要的学习、探究、训练、检测和拓展, 使学生真正跳出了题海。导学案既是学生课堂学习的方案, 又是期中期末的复习材料, 这样既减轻了学生的学习负担又减轻了学生的经济负担。导学案的设计遵循了人的认知规律, 由预习准备开始, 到提出问题、研讨学习、释疑解难、训练巩固、监测评估, 再到拓展训练, 环环相扣, 知识生成、能力提升自然蕴含其中。

(二) 导学案教学要真正做到“教是为了不教”。导学案导学的基本思路是: 提出问题—指示方法—学习探究—展示反馈—点拨(以问题启发问题)—巩固训练。这样的引导是符合科学的学习规律和认知规律的, 自然也成了学生学习的基本策略和方法。通过一段时间的训练, 学生自然就能学会自主学习, 学会自己提出问题, 寻找解决问题的方法和途径, 不仅可以摸清学习的规律, 还可以有创新的方法和措施。

参考文献

[1] 陈建喜. 初中英语教学中案例教学法的实践探讨[J]. 中学生英语, 2020(28): 9.

[2] 刘甜甜. 抓真 抓细 抓常——线上初中英语教案案例分析[J]. 新智慧, 2020(21): 81-82.