

# 直线斜率的几种巧用

付立业

(湖南省武冈市第十中学 湖南 武冈 422400)

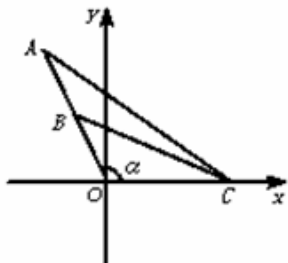
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2020.06.362

新课程改革的核心内容就是要培养学生的创新精神、创新意识和探究能力，因此，在高中数学教学的各个环节，应以培养学生创新、探究能力为学科核心素养。斜率作为直线重要的性质，解题中若能恰当构建斜率模型可以起到事半功倍的结果，现举几例说明。

## 一、借助直线的斜率巧解应用题

例1 某校一年级为配合素质教育，利用一间教室作为学生绘画成果展览室，为节约经费，他们利用课桌作为展台，将装画的镜框放置桌上，斜靠展出，已知镜框对桌面的倾斜角为  $\alpha$  ( $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ ) 镜框中，画的上、下边缘与镜框下边缘分别相距  $a$  m,  $b$  m ( $a > b$ )。问学生距离镜框下缘多远看画的效果最佳？

【解析】建立如图所示的直角坐标系，AO为镜框边，AB为画的宽度，O为下边缘上的一点，在x轴的正半轴上找一点C(x, 0) ( $x > 0$ )，欲使看画的效果最佳，应使  $\angle ACB$  取得最大值。



由三角函数的定义知：A、B 两点坐标分别为  $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ 、 $(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$ ，于是直线 AC、BC 的斜率分别为：

$$k_{AC} = \tan \angle CAx = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha - x}, \quad k_{BC} = \tan \angle CBx = \frac{b \sin \alpha}{b \cos \alpha - x}$$
$$\tan \angle ACB = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}} = \frac{(a-b) \cdot x \sin \alpha}{ab - (a+b)x \cos \alpha + x^2} = \frac{(a-b) \cdot \sin \alpha}{\frac{ab}{x} + x - (a+b) \cos \alpha}$$

由于  $\angle ACB$  为锐角，且  $x > 0$ ，则  $\tan \angle ACB \leq \frac{(a-b) \cdot \sin \alpha}{2\sqrt{ab} - (a+b) \cos \alpha}$ ，当且仅当  $\frac{ab}{x} = x$ ，即  $x = \sqrt{ab}$  时，等号成立，此时  $\angle ACB$  取最大值，对应的点为  $C(\sqrt{ab}, 0)$ ，因此，学生距离镜框下缘  $\sqrt{ab}$  cm 时，视角最大，即看画效果最佳。

【点评】本题是一个非常实际的数学问题，它不仅考查了两点连线的斜率公式、用不等式法求最值以及对三角知识的综合运用，而且更重要的是考查了把实际问题转化为数学问题的能力。解决本题有几处至关重要，一是建立恰当的坐标系，使问题转化成解析几何问题求解；二是把问题进一步转化成求  $\tan \angle ACB$  的最大值，从而转化为有关斜率的问题。

## 二、借助直线的斜率比较大小

例2 设  $M = \frac{10^{2000} + 1}{10^{2001} + 1}$ ,  $N = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$ ，则M与N的大小关系为 ( )

- A.  $M > N$
- B.  $M = N$
- C.  $M < N$
- D. 无法判断

【解析】将问题转化为比较 A(-1, -1) 与 B( $10^{2001}$ ,  $10^{2000}$ ) 及 C( $10^{2002}$ ,  $10^{2001}$ ) 连线的斜率大小，因为B、C两点的直线方程为  $y = \frac{1}{10}x$ ，点A在直线的下方， $\therefore k_{AB} > k_{AC}$ ，即  $M > N$ 。答案：A。

【点评】如果此题按常规方法处理直接作差将会比较难处理，而采用直线斜率的几何意义就直接明了，易处理。

## 三、借助直线的斜率求直线的方程

例3 过点P(2, 1)作直线l分别交x, y的正半轴于A, B两点，求(1)  $\triangle ABO$  面积的最小值，及相应的直线方程；(2)若  $|PA| \cdot |PB|$  取最小值时，求直线的方程。

【解析】显然直线效率存在，设直线方程为

$$y - 1 = k(x - 2) \quad (k < 0), \quad \text{得点 } A(2 - \frac{1}{k}, 0), \quad B(0, 1 - 2k), \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} (2 - \frac{1}{k})(1 - 2k) = 2 + (-2k - \frac{1}{2k}),$$

$\therefore k < 0 \quad \therefore S_{\triangle ABO} \geq 4$ ，此时  $k = -\frac{1}{2}$  即直线为  $x + 2y - 4 = 0$ 。

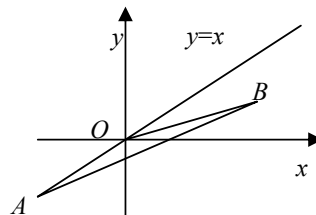
$$(2) |PA| \cdot |PB| = \sqrt{8 + 4(k^2 + \frac{1}{k^2})} \geq 4, \quad \text{此时 } k = -1 \text{ 即直线为 } x + y - 3 = 0.$$

## 四、构造直线斜率证明不等式问题

例4 已知a、b、m都是正实数，并且  $a < b$ ，求证： $\frac{a+m}{b+m} > \frac{b}{a}$ 。

【证明】如图，在平面直角坐标系内，设点  $A(-m, -m)$ ，点  $B(b, a)$ 。由  $m > 0$  和  $0 < a < b$  知点A在直线  $y = x$  在第三象限的图像上，点B在直线  $y = x$  在第一象限的图像的下方，于是可得斜率  $k_{AB} > k_{OB}$ ，即

$$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}, \quad \text{原不等式得证。}$$



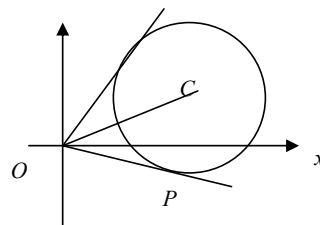
【点评】这是新教材高二数学上册上的一道例题。教材上是用比较法去进行证明的，但细细研究会发现还可通过构造直线斜率来证明该不等式，因为所证式子酷似直线的斜率表达式，故可借助题设条件构造直线，然后运用倾斜角的大小与斜率的关系来证明不等式。

## 五、构造直线斜率解决变量或参数范围问题

例5 若  $p(x, y)$  在圆  $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 6$  上运动，求  $\frac{y}{x}$  的取值范围。

【解析】因为  $\frac{y}{x}$  是直线 OP 的斜率，在圆  $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 6$  上，当 p 点是由原点 O 向圆作切线的切点时， $\frac{y}{x}$  取到最大值与最小值。

设直线 OP 的斜率为 k，直线 OP 的方程为  $y = kx$ ，圆心 C 的坐标为  $(3, \sqrt{3})$ ，半径为  $\sqrt{6}$ 。由于圆心 C 到切线的距离等于半径  $\sqrt{6}$ ，于是可得方程： $\frac{|\sqrt{3} - 3k|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{6}$ ，解得  $k_1 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $k_2 = \sqrt{3} - 2$ 。所以  $\frac{y}{x}$  的取值范围为  $[0, 2 + \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} - 2, 0)$ 。



【点评】 $\frac{y}{x}$  可以看成是点 p 与原点连线所在直线的斜率，则

可以构造如下一个函数：设  $k = \frac{y}{x}$ ，得函数  $y = kx$ 。于是所求  $\frac{y}{x}$  的取值范围问题就可以转换为求函数  $y = kx$  所对应直线的斜率的取值范围问题。