块复合矩阵的块特征值在超平面下的包含域

侯方博

（吉林农业科技学院 电气与信息工程学院 吉林 吉林 132101）

[摘 要]本文讨论了一类特殊的复数集合上的分块矩阵 $A\in M_{p,q}(P_n)$ 其块特征值包含域的问题，主要利用引入超平面的方法给出了块特征值的新的包含域，对于特征值的范围给出更好的估计。

[关键词]块特征值；超平面；包含域

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2020.06.363

预备知识及记号

1. 设 $P_n(C)$ 为两两可交换的 n 阶复方阵集合；$M_{p,q}(P_n)$ 表示所有分为 $p\times q$ 块且每子块均属于 $P_n(C)$ 的复合矩阵的集合，记之为块复合矩阵集。显然，集合 $P_n(C)$ 对加、减、乘、逆运算是封闭的。令 $A=(A_{ij})\in M_{p,q}(P_n(\mathrm{C}))$，即为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq}\end{pmatrix}$$

2. 如果 $A=(A_{ij})\in M_m(P_n(\mathrm{C}))$，存在 $\Lambda\in P_n(C)$ 及满秩矩阵 $X\in M_{m,1}(P_n(\mathrm{C}))$，使得

$$AX=X\Lambda$$

则称 Λ 为 A 的块特征值，X 为相应的块特征向量. A 的全部块特征值集合记为 $\lambda_b(A)$.

4. $R_i(A)=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|,\ C_j(A)=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|,$ 这里 $\|\cdot\|$ 取与向量范数相容的矩阵范数.

5. $Q_{m-1}=\{(a_1,\ldots,a_{m-1})^T\in R^{m-1}:a_j\in[0,1],j\in<m-1>\},$

6. $T_t:T_t\subseteq<n>,$ 表示 $<n>$ 中含有 t 个元的子集。

为了给出超平面，我们有：

引理1 $A=(A_{ij})\in M_m(p_n)$ 奇异，则有 $X=(X_1,X_2,\ldots X_m)^T\in C^{mn}\setminus\{0\},X_i\in C^n$ 使得 $AX=0$ 且 $\|X_k\|=1=\max_{j\in<m>}\|X_j\|,\quad A_{ii}(i\in<m>)$ 非奇异，则有 $y=(y_1\ldots y_{k-1},y_{k+1}\ldots y_m)^T\in Q_{m-1}$，使得 $\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}\le\sum_{j\neq k}\|A_{kj}\|y_j$.

证明 由已知有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \ldots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1\\ \mathrm{X}_2\\ \vdots\\ \mathrm{X}_m\end{pmatrix}=0\in C^{mn}$$

按第 k 块行展开有：

$A_{k1}X_1+A_{k2}X_2+\ldots+A_{km}X_m=0,$ 即 $A_{kk}X_k=-\sum_{j\neq k}A_{kj}X_j,$ 由 $A_{ii},i\in<m>$ 非奇异有 $X_k=-A_{kk}^{-1}\sum_{j\neq k}A_{kj}X_j,$ 两边取范数有 $\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}\le(\sum_{j\neq k,j=1}^{m}\|A_{kj}\|\|X_j\|)$。

取 $\|X_j\|=y_j$，则 $y_i\in[0,1]$ 且有 $\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}\le\sum_{j\neq k}\|A_{kj}\|y_j$。

引理2 $A=(A_{ij})\in M_m(p_n)$ 奇异，则有 $X=(X_1,X_2,\ldots X_m)^T\in C^{mn}\setminus\{0\},X_i\in C^n$ 使得 $AX=0$ 且 $\|X_k\|=1=\max_{j\in<m>}\|X_j\|,\ A_{ii},\ i\in<m>$，非奇异，则存在 $y=(y_1\ldots y_{k-1},y_{k+1}\ldots y_m)^T\in Q_{m-1}$，使得，$\sum_{j\neq k}(\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-C_j(A))y_j\le C_k(A)-\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}$。

证明 将 $AX=0$ 按第 i 块行展开有：

$\forall i\in<m>,$ 即有：$A_{ii}X_i=-\sum_{j\neq i}A_{ij}X_j,$ 进而有：$X_i=-A_{ii}^{-1}\sum_{j\neq i}A_{ij}X_j,$

两边取范数有：$\|X_i\|\le\|A_{ii}^{-1}\|(\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|\|X_j\|),$ 从而 $\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}\|X_{ii}\|\le\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|\|X_j\|$。

对 i 求和：

$\sum_{i=1}^{m}\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}\|X_i\|\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|\|X_j\|=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\neq j}\|A_{ij}\|\|X_j\|$

$=\sum_{j=1}^{m}C_j(A)\|X_j\|,$ 即 $\sum_{j=1}^{m}\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}\|X_j\|\le\sum_{j=1}^{m}C_j(A)\|X_j\|,$

故

$\sum_{j\neq k}(\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-C_j(A))\|X_j\|\le(C_k(A)-\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1})\|X_k\|=C_k(A)-\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}$。

取 $\|X_k\|=y_i$，则 $y_i\in[0,1]$ 且有 $\sum_{j\neq k}(\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-C_j(A))y_j\le C_k(A)-\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}$.

证毕。

引理3[1] $A=(A_{ij})\in M_m(P_n(\mathrm{C}))$，若 $\Lambda\in P_n(C)\cap\lambda_b(A)$，则 $I_m\otimes\Lambda-A$ 奇异.

在 R^{m-1} 中定义，

$P_k=\{y=(y_1\ldots y_{k-1},y_{k+1}\ldots y_m)^T\in R^{m-1}:\sum_{j\neq k}\|A_{kj}\|y_j=\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}\}$。

P_k 将 R^{m-1} 分成两个闭及开半空间：

$\overline{P}_k^{+}=\{y=(y_1\ldots y_{k-1},y_{k+1}\ldots y_m)^T\in R^{m-1}:\sum_{j\neq k}\|A_{kj}\|y_j\ge\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}\}$；

$P_k^{-}=\{y=(y_1\ldots y_{k-1},y_{k+1}\ldots y_m)^T\in R^{m-1}:\sum_{j\neq k}\|A_{kj}\|y_j<\left\|A_{kk}^{-1}\right\|^{-1}\}$。

$1=\|X_k\|\le\|A_{KK}^{-1}\|(\sum_{j\ne k,j=1}^{m}\|A_{kj}\|\|X_j\|)$，从而

$=C_k(A)-\|A_{kk}^{-1}\|^{-1}\}$

S_k 将 R^{m-1} 分成两个闭及开半空间：

$\overline{S}_k^-=\{y=(y_1...y_{k-1},y_{k+1}...y_m)^T\in R^{m-1}:$

$\sum_{j\ne k}(\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(A))y_j\le C_k(A)-\|A_{kk}^{-1}\|^{-1}\}$；

$S_k^+=\{y=(y_1...y_{k-1},y_{k+1}...y_m)^T\in R^{m-1}:$

$\sum_{j\ne k}(\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(A))y_j>C_k(A)-\|A_{kk}^{-1}\|^{-1}\}$。

定理 1 $A=(A_{ij})\in M_m(p_n)$ 满足 $\overline{P}_k^+\cap\overline{S}_k^-\cap Q_{m-1}=\phi$，$\forall k\in<m>$，则 A 非奇异。

定理 2 设 $A=(A_{ij})\in M_m(P_n)$，有 $t\in<m>$ 使得

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}>R_{it}(A)=\max_{T_{t-1}\subseteq<m>\setminus\{i\}}\sum_{j\in T_{t-1}}\|A_{ij}\|,\forall i\in<m>,\quad(1)$$

$$\sum_{i\in T_t}(\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-C_i(A))>0,\forall T_t\subseteq<m>,\quad(2)$$

则 A 非奇异。

证明 在 R^{m-1} 中定义超平面 $P(\forall k\in,<m>)$

$$P=\{y=(y_1...y_{k-1},y_{k+1}...y_m)^T\in Q_{m-1}:\sum_{j\ne k}y_j=t-1\},$$

则 P 将 Q_{m-1} 划分成两个闭凸集：

$\overline{Q}_{m-1}^+=\{y=(y_1...y_{k-1},y_{k+1}...y_m)^T\in Q_{m-1}:\sum_{j\ne k}y_j\ge t-1\}$；

$\overline{Q}_{m-1}^-=\{y=(y_1...y_{k-1},y_{k+1}...y_m)^T\in Q_{m-1}:\sum_{j\ne k}y_j\le t-1\}$。

易见：$\overline{Q}_{m-1}^+$ 中每个极点由至少 $t-1$ 个 1 其余为 0 元的 $m-1$ 个 0，1 元组成；

$\overline{Q}_{m-1}^-$ 中每个极点由至多 $t-1$ 个 1 其余为 0 元的 $m-1$ 个 0，1 元组成。

$\forall T'_{t-1}\subseteq<m>\setminus\{k\}$，（1）意味着：

$$\|A_{kk}^{-1}\|>\sum_{j\in T'_{t-1}}\|A_{kj}\|=\max_{T_{t-1}\subseteq<m>\setminus\{k\}}\sum_{j\in T_{t-1}}\|A_{kj}\|$$

于是对 $\overline{Q}_{m-1}^-$ 中的每个极点，进而对于 $\overline{Q}_{m-1}^-$ 中的每一点 y 都有

$$\|A_{kk}^{-1}\|>\sum_{j\in T'_{t-1}}\|A_{kj}\|\ge\sum_{j\ne k}\|A_{kj}\|y_j,$$

则 $\overline{Q}_{m-1}^-\subseteq P_k^-$.

另一方面（2）说明至多有 $t-1$ 个足码满足 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-C_i(A)\le 0$，令

T_{t-1} 包含全部 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-C_i(A)$ 之足码，则

在 R^{m-1} 中定义，

$$S_k=\{y=(y_1...y_{k-1},y_{k+1}...y_m)^T\in R^{m-1}:\ \sum_{j\ne k}(\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(A))y_j$$

$$\sum_{i\in T_{t-1}\cup\{k\}}[\|A_{ii}^{-1}\|-C_i(A)]>0,$$

即

$$\sum_{i\in T_{t-1}\cup\{k\}}[\|A_{ii}^{-1}\|-C_i(A)]>C_k(A)-\|A_{kk}^{-1}\|.$$

于是对 $\overline{Q}_{m-1}^+$ 中的每个极点，进而对于 $\overline{Q}_{m-1}^+$ 中的每一点 y 都有

$$\sum_{i\ne k}\|A_{ii}^{-1}\|-C_i(A))y_i\ge\sum_{i\in T_{t-1}}[\|A_{ii}^{-1}\|-C_i(A)]>C_i(A)]>C_k(A)-\|A_{kk}^{-1}\|^{-1},$$

则 $\overline{Q}_{m-1}^+\subseteq S_k^+$。从而有 $Q_{m-1}=\overline{Q}_{m-1}^+\cup\overline{Q}_{m-1}^-\subseteq P_k^-\cap S_k^+$，即

$Q_{m-1}\cap P_k^+\cap S_k^-=\phi$，由定理 1 知 A 非奇异。

定理 3 $A=(A_{ij})\in M_m(p_n)$，$\forall kt\in<m>$，则 $\lambda_b(A)\subseteq\tau_1\cup\tau_2\cup\tau_3$，

其中

$$\tau_1=\bigcup_{i\in<m>}G_{it}=\{\Lambda\in P_n(C):\|(\Lambda-A_{ii})^{-1}\|^{-1}\le R_{it}(A)\};$$

$$\tau_2=\bigcup_{T_t<m>}G_{it}=\{\Lambda\in P_n(C):\sum_{i\in T_t}(\|(\Lambda-A_{ii})^{-1}\|^{-1}-C_i(A))\le 0\};$$

$$\tau_3=\bigcup_{i\in<m>}\{\Lambda\in P_n(C):Det(\Lambda-A_{ii})=0\}.$$

证明 任取 $\Lambda\in\lambda_b(A)$，若 $\Lambda\overline{\in}\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$，则由定理 2 知 $I_m\otimes\Lambda-A$ 非奇异。

此与引理 3 之结论矛盾，则 $\Lambda\in\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$，由 Λ 的任意性知

$\lambda_b(A)\subseteq\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$.

参考文献

[1]逄明贤，块复合矩阵的特征值[J]，数学学报，1991，34（1）：48-55.

[2]逄明贤，矩阵普论[M]，吉林大学出版社，1989.

[3]孙继广，矩阵扰动分析[M]，科学出版社，2001

[4]李华，矩阵特征值的一类新的包含域[J]，纯粹数学与应用数学，2010，26（4）：673-678.

[5]刘钰靖，逄明贤，分块矩阵的α，β型谱包含域[J]，北华大学学报（自然科学版），2006，7（6）：488-491.

基金项目：吉林省教育厅“十三五”科技技术项目“二部分划下的块复合矩阵之块特征值包含于的研究”合同编号：JJKH20180731KJ.