利用图像巧解题

李翠娟

（福建省宁德市古田县第三中学　福建　宁德　352265）

[摘　要]数形结合是中学数学极为重要的思想方法。数形结合是将抽象问题具体化，复杂问题简单化，解题时将问题转化为与之等价的图形问题，可以直观地使问题简洁获解。

[关键词]数形结合；函数图像；思想方法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2019.11.339

数形结合是中学数学重要的思想方法之一，利用图形解题，可以使复杂问题简单化，抽象问题具体化，为解题提供行之有效的途径。以下介绍几种高中常见的数形结合的题型：

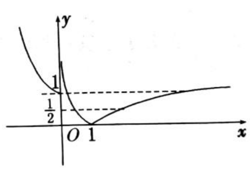
1、确定方程解的个数

一些不容易求解的方程，甚至在学生看来有点怪异的方程，它的解的个数的判断问题，若直接用代数法解方程，运算麻烦且不易得出正确的答案，利用图像把问题转化为熟悉函数图像的交点问题，既直观又简洁地找到正确的答案。

例1：已知$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}|lgx|, & x>0\\ 2^{|x|}, & x\le 0\end{cases}$，则方程$\mathbf{2f^2(x)-3f(x)+1=0}$解的个数是 ____

解析：方程$\mathbf{2f^2(x)-3f(x)+1=0}$的解为$\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}}$或1

作出y=f（x）的图象，由图象知方程解的个数为5

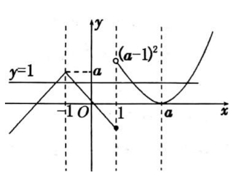


2、已知零点个数求参数范围

已知零点个数求参数范围，第一类直接画出函数图像，观察图像得出结论，第二类不能直接画出函数图像的，可以等价地转化为两个函数图像，通过判断交点的个数要求得出参数范围，使繁杂问题直观获解。

例2：已知函数$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}a-|x+1|, & x>0\\ (x-a)^2, & x\le 0\end{cases}$，函数$\mathbf{g(x)=2-f(x)}$，若函数$\mathbf{y=f(x)-g(x)}$恰有4个零点，则参数a的取值范围是 ____

解析：作出函数f（x）的图象，如图所示：



因为$\mathbf{g(x)=2-f(x)}$恰有4个零点，即函数f（x）的图象与直线y = 1有4个不同的交点，所以观察图象可得$\begin{cases}a>1\\ a-2\le 1\\ (1-a)^2>1\end{cases}$，解得$2<a\le 3$

∴参数a的取值范围是（2，3）

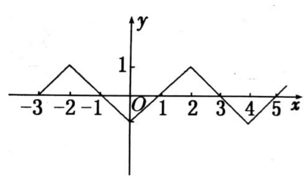
3、求不等式的解集

一类求不等式解集问题，直接解比较烦琐，画出函数图像，直接在图像中根据不等式的条件判断满足不等式的区域，极为直观便捷。

例3：函数f（x）是周期为4的偶函数，当$\mathbf{x\in[0,2]}$时，$\mathbf{f(x)=x-1}$，则不等式xf（x）＞0 在（-1，3）上的解集为（）

$A\,(1,3)$　$B\,(-1,1)$　$C\,(-1,0)\cup(1,3)$　$D\,(-1,0)\cup(0,1)$

解析：选C，作出函数f（x）的图象如图所示



当$\mathbf{x\in(-1,0)}$时，由xf（x）＞0，得$\mathbf{x\in(-1,0)}$

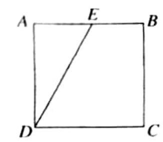
当$\mathbf{x\in(0,1)}$时，由xf（x）＞0，得$\mathbf{x\in\emptyset}$

当$\mathbf{x\in(1,3)}$时，由xf（x）＞0，得$\mathbf{x\in(1,3)}$

平面向量的运算问题

向量融 “数”“ 形”于一体，具有几何形式与代数形式，恰到好处的运用数形结合方法，在解决向量问题时会起到妙不可言的作用。

例4：已知正方形ABCD的边长为1，点E是AB边上的动点，则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$的值为 ____；$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$的最大值为 ____



解析：由图知，无论E点在哪个位置，$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{CB}$方向上的投影都是CB=1

$\therefore \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CB}|\cdot 1=1$

当E运动到B点时，$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{DC}$方向上的投影最大，即为DC= 1

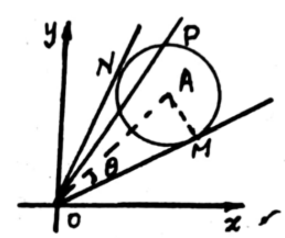
$\therefore (\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{\max}=\overrightarrow{DE}\cdot 1=1$

4、由 “数”联想 “形”巧解题

由代数式联想到它表示的图形，通过构造图形，利用图形性质求出结果，既直观又简洁。

例5：　$\mathbf{x,y\in R}$，　且$(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$，求$\frac{y}{x}$的范围

解析：$(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$　表示以A（1，1）为原点，$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$为半径的圆，$\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}$可以看成过点P（x，y）和原点O（0，0）直线的斜率，如图所示



由图上易知OM，ON的斜率分别是斜率的最小值和最大值，

从而$\sin\theta=\frac{AM}{OA}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以$\theta=\pi/12$，由此易知OM的斜率为$\sqrt{3}/3$，ON　的斜率为$\sqrt{3}$，

故$\frac{y}{x}$的范围是$[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$

我国著名数学家华罗庚说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事非。”可见数和形之间有着十分密切的联系，在一定条件下，数和形之间可以相互转化，相互渗透。解题时，将问题转化为与之等价的图形问题，可以直观地使问题简洁获解，大大简化解题过程。数学学习中突出数形结合思想正是充分把握住了数学的精髓和灵魂。

作者简介：

姓名：李翠娟（1971.10），性别：女，籍贯：福建省宁德市，学历：本科，职称：一级，研究方向：高中数学