例谈数学竞赛中复数小题的解法

杜万根
常州市北郊高级中学

[摘　要]在目前高中教学内容中复数虽然未能占重要的地位，但从中学数学到大学数学中复数起到一个很重要的衔接作用。复数运算有很多重要性质，相关试题也在数学竞赛和试卷中经常出现的，而解决高中数学竞赛中的复数试题，也是对复数知识的学习强化。本文通过研习复数联赛试题，可以深化对复数知识的理解，构建完整的知识结构体系。本文结合联赛中复数的小题，谈谈复数问题的解题策略以及复数性质的运用。

[关键词]复数的性质；复数小题；高中数学
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.10.1684

在目前高中教学内容中复数虽然未能占重要的地位，但从中学数学到大学数学中复数起到一个很重要的衔接作用，因此近几年的高中数学联赛中复数是常考内容。联赛试题中复数内容主要涉及复数运算、复数的性质、复数的几何意义以及复数方程。复数内容体系需要强化，通过研习复数试题，认真总结研究，系统详尽的归纳，可以深化对知识的理解，构建完成的知识结构体系，提高解题的思辨能力和思维的灵活性。本文结合联赛中复数的小题，谈谈复数问题的解题策略以及复数性质的运用。

一、复数模的性质

复数的模对复数有重要的意义，它是联系三角知识和几何知识的一个纽带，有必要对模的性质深入思考研究。

（1）$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

（2）$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$

（3）$z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$

例1（2020年浙江省高中数学预赛试题）已知z为复数，且$|z|=1$，当$|1+z+3z^2+z^3+z^4|$取得最小值时，复数z为____

解：注意到$|z^2|=|z|^2=1$，$z\overline{z}=|z|^2=1$，$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$

$$
\begin{aligned}
&|1+z+3z^2+z^3+z^4|\\
&=\frac{|1+z+3z^2+z^3+z^4|}{|z^2|}\\
&=|\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+3+z+z^2|\\
&=|(\frac{1}{z}+z)^2+\frac{1}{z}+z+1|\\
&=|(\overline{z}+z)^2+\overline{z}+z+1|\\
&=|(2\operatorname{Re}z)^2+2\operatorname{Re}z+1|\\
&=|(2\operatorname{Re}z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}|\\
&\geq\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

当$\operatorname{Re}z=-\dfrac{1}{4}$时，取等号。此时，$z=-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}$

点评：本例利用了复数模的性质$|\dfrac{z_1}{z_2}|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，巧妙的实现了降次，再整体思想化为二次函数形式求最值，避免了复杂运算，减轻了计算量。

练习1（2010年四川省高中数学预赛试题）已知复数$z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{Z})$，满足$z^3=2+11\mathrm{i}$，则$a+b=$_______.

解：由条件得，$|z|^3=|z^3|=\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{125}$，所以$|z|=\sqrt{5}$，

于是$a^2+b^2=5$，$(a,b\in\mathbf{Z})$

$(a,b)\in\{(1,2),(-1,2),(1,-2),(-1,-2),(2,1),(-2,1),(2,-1)\ (-2,-1)\}$，

注意到$z^3=(a+b\mathrm{i})^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\mathrm{i}$，

经过验证，只有$(a,b)=(2,1)$符合条件，因此$a+b=3$。

二、共轭复数的运算性质

共轭复数作为复数内容中的重要概念，极为丰富的性质。理清共轭复数性质的联系，找出内在的逻辑，是灵活运用性质解题的关键。

共轭复数的性质

（1）$\overline{(\overline{z})}\quad z$；

（2）$z=\overline{z}\Leftrightarrow z$为实数；

（3）$z=\dfrac{1}{\overline{z}}\Leftrightarrow|z|=1$；

（4）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$；

（5）$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$；

（6）$\overline{(\dfrac{z_1}{z_2})}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}(z_2\neq 0)$

例2（2019年贵州省高中数学预赛试题）设复数z_1,z_2满足$|z_1|=|z_2|=1$，且$z_1+z_2-1=0$，则$(z_1-z_2)^2=$________

解：$z_1\overline{z}_1=|z_1|^2=1, z_2\overline{z}_2=|z_2|^2=1$，

$(z_1+z_2-1)\overline{z}_1=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_1-\overline{z}_1=1+z_2\overline{z}_1-\overline{z}_1=0$，即$1+z_2\overline{z}_1-\overline{z}_1=0$①，

$\overline{(z_1+z_2-1)}z_2=(\overline{z}_1+\overline{z}_2-1)z_2=\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_2-z_2=\overline{z}_1z_2+1-z_2=0$，即$\overline{z}_1z_2+1-z_2=0$②，

由①和②，可得$z_2=\overline{z}_1$，所以$z_1z_2=z_1\overline{z}_1=1$,

$(z_1-z_2)^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2=1-4=-3$。

点评：本例利用共轭复数的性质$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$

，反复使用等式$z_1+z_2-1=0$，利用算两次的技巧，得到$z_2=\overline{z}_1$，进而解决问题。

练习2（2014年天津市高中数学预赛试题）若复数$a=1+\mathrm{i}$，$b=2+\mathrm{i}$，$c=3+\mathrm{i}$，$x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则$|a+bx+cx^2|=$_______.

解：注意到$x^2+x+1=0$，从而$x^3=1$，$|x|=1$，$x\overline{x}=1$，又a,b,c的虚部相等，结合$x^2+x+1=0$，知只要针对$a=1,b=2,c=3$进行计算即可。

所以$|a+bx+cx^2|^2=(a+bx+cx^2)(a+b\overline{x}+c\overline{x}^2)$

$=a^2+b^2+c^2+ab(x+\overline{x})+bc(x\overline{x}^2+\overline{x}x^2)+ac(x^2+\overline{x}^2)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

将$a=1,b=2,c=3$代入上式得，$|a+bx+cx^2|^2=3$，

从而$|a+bx+cx^2|=\sqrt{3}$。

三、复数方程根的问题

在复数的发展史上，三次方程的求解引出了复数的产生。学习与复数有关的方程求解，能够让学生深入理解概念，加深有关性质的感受，认识到引入复数概念的必要性与合理性。

例3（2020年重庆市高中数学预赛试题）若二次实系数方程$ax^2+bx+c=0$有两个虚根x_1,x_2，且$x_1^3\in\mathbf{R}$，则$\frac{ac}{b^2}=$______

解：依题意，$ax_1^2+bx_1+c=0$①，等式两边乘以 ，得$bx_1^2+cx_1+ax_1^3=0$②

①$\times b-$②$\times a$：$(b^2-ac)x_1+bc-a^2x_1^3=0$，

因为$(b^2-ac)\in\mathbf{R},(bc-a^2x_1^3)\in\mathbf{R}$，但$x_1$是虚数，

所以$b^2-ac=0$，因此$\frac{ac}{b^2}=1$。

点评：利用复数的代数形式处理高次问题计算量较大，过程繁琐。本例使用了非零实数和虚数相乘还是虚数这一结论。巧妙构造的利用了$x_1^3\in\mathbf{R}$这个条件，极大节省了解题时间。

练习3（2014年辽宁省高中数学预赛试题）已知复数z，满足$z+\frac{1}{z}=1$，则$z^{2014}+\frac{1}{z^{2014}}=$_______.

解：由$z+\frac{1}{z}=1$，得$z=e^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$，因此$z^{2014}=e^{\pm\frac{2014\pi}{3}\mathrm{i}}=e^{\pm\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$

$z^{2014}+\frac{1}{z^{2014}}=2\cos\frac{4\pi}{3}=-1$

点评：该解法利用复数的三角函数形式和指数函数形式，以及对应的性质。

四、复数的几何意义

复数的几何意义是复数中极其重要的内容，加强对复数几何意义的学习，更容易理解复数这个概念。学生需要了解复数实部和虚部代表的数与复平面上点之间的一一对应关系，更要深入领会仔细研习复数本质特征，领悟运算的几何意义。

例4（2020年广西省高中数学预赛试题）已知复数z满足$|z+\sqrt{3}i|+|z-\sqrt{3}i|=4$，则$|z-i|$的最小值为____

解：注意到，z在复平面上对应的曲线方程为$\frac{y^2}{4}+x^2=1$。

记$z=\cos\theta+2\mathrm{i}\sin\theta(\theta\in[0,2\pi))$，则$z-\mathrm{i}=\cos\theta+(2\sin\theta-1)\mathrm{i}$。

故 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{\cos^2\theta+(2\sin\theta-1)^2}=\sqrt{3(\sin\theta-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}}\geq\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

当且仅当$\sin\theta=\frac{2}{3}$时，上式等号成立。

点评：复数的几何意义主要指复平面上的两点间距离公式。将复数问题转化为解析几何相关问题，熟悉相关模型是解决这类问题的关键。从数转为形，体现了数学中数形结合思想。

练习4（2018年山东省高中数学预赛试题）已知复数z，满足$|z-1|+|z-3-2\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$，则$|z|$的最小值为_______.

解：设$A(1,0),B(3,2)$，$AB=2\sqrt{2}$，则点z的轨迹为线段AB。因此$|z|$的最小值为原点O到A的距离，即$|z|_{\min}=OA=1$。

不同版本教材对高中复数地位都表现了较高的认可度，一致强调复数的内容的重要性，认为复数是一类数学中重要的运算对象，有极其广泛的应用，要求学生认识引入复数的必要性，知道数系的扩充源头，掌握复数的各种表示方法、运算性质及其几何意义。

复数是高中比较有特色的内容，不仅是数系的一次扩充，还为数学问题提供了一次全新的途径和视角，沟通了向量、几何、三角等模块的联系。数学竞赛中复数试题，其思想方法能够开阔学生的视野，其解题技巧，提升审视问题的高度，进行竞赛复数题训练是非常有意义的活动。本文通过分析具体竞赛试题，在内容的组织上，不仅体现对具体复数基本知识点的考查，更在客观上体现对一般原理的明示与引导，给学生在思考解决问题的同时获得深刻的启发，以期对学生发散思维有高度上的推动，让更多人认识到复数赛题的使用价值。

参考文献

[1]方志平.例谈数学竞赛中复数的解题策略[J].中学生数学：高中版，2019（2）：2.

[2]王涵，李宁.点击数学竞赛中的复数小题[J].数学通讯，2020（7）：2.

[3]郑良.数学竞赛中的复数问题[J].中学生数理化（高二数学），2019.