两个复合欧拉方程$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=2,4$的正整数解

张永华　赵祈芬　雷兴辉

安康职业技术学院　基础教学部

[摘　要]欧拉函数$\varphi(n)$是数论研究的一个重要函数，其中关于欧拉函数方程的研究已得到了不少的成果，本文利用初等数论知识及方法，用简洁的求解方法得到复杂的欧拉方程$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=2,4$的所有正整数解，包含了文献[2]和[4]的结果，更具有普遍性。

[关键词]欧拉函数；正整数解；欧拉方程

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.10.878

欧拉函数的整数解问题一直是数论研究的热点课题，欧拉函数方程的建立对欧拉函数的整数解至关重要，本文将讨论更复杂的复合欧拉函数方程$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=2,4$的正整数解的问题，给出了这个方程的所有正整数解。

一、引理

引理1设$n\geq 1$，我们用$\varphi(n)$表示不大于n并且与n互素的正整数的个数，通常$\varphi(n)$就叫做欧拉函数。

引理2若正整数$n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$，其中$p_1,p_2,\cdots,p_k$为素数，则欧拉函数$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$.

引理3当$n\geq 2$时，有$\varphi(n)<n$；当$n\geq 3$时，$\varphi(n)$为偶数。

引理4$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)(\frac{d}{\varphi(d)})$,这里$d=(m,n)$.特别地，如果$(m,n)=1$，则$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

引理5当$l\geq 6$时，若$n-\varphi(\varphi(n)\;=l$，则$n>l$且$l=n-\varphi(\varphi(n)\;>n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$,即$l+1\leq n\leq 2l-1$.

二、定理及其证明

定理1 复合欧拉函数方程

$$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=2 \qquad (1)$$

的正整数解为：

$n=15,18,19,23,24,26,27,28,30,32,34,44,46,50,35,42,62$.

证明：令$\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))=X_1$，因为$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=2$，所以$X_1=3,4,6$.下面分类讨论：

情形1若$X_1=3$,由引理可得，此时（1）方程无解。

情形2若$X_1=4$，得到同文献[2]的结论，其$\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))=4$时的情形，正整数解为：$n=15,18,19,23,24,26,27,28,30,32,34,44,46,50$

情形3若$X_1=6$，得到同文献[2]结论，其$\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))=6$时的情形，其正整数解为：$n=35,42,62$。

综上所述，复合欧拉函数方程$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=2$的正整数解：

$n=15,18,19,23,24,26,27,28,30,32,34,44,46,50,35,42,62$.证必

定理2 复合欧拉函数方程

$$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=4 \qquad (2)$$

的正整数解为：

$n=31,33,36,38,39,40,43,48,51,52,53,54,56,57,58,60,61,64,66,68$

$70,74,78,100,118$.

证明：令$\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))=X_1$,因为$\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=4$，所以$X_1=5,8,10,12$.下面分类讨论：

情形1若$X_1=5$,由引理可得，此时（2）方程无解。

情形2;若$X_1=8$,令$X_2=\varphi(n-\varphi(\varphi(n)))$，则$X_2=15,16,20,24,30$.

当$X_2=15$时，由引理可得，$n-\varphi(\varphi(n)\;=X_3$,此时方程（2）无解。

当$X_2=16$时，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3=17,32,34,40,48,60$。若$X_3=17,34,60$时，由引理可得，此时（2）方程无解；若$X_3=32$时，此时$33\leq n\leq 63$，将其$33\leq n\leq 63$逐一代入$n-\varphi(\varphi(n))=32$，即$\varphi(\varphi(n))=n-32$，经验证得$n=36,38,40$满足方程（2）.

若$X_3=40$时，此时$41\leq n\leq 79$，将其$41\leq n\leq 79$逐一代入$n-\varphi(\varphi(n))=40$，即$\varphi(\varphi(n))=n-40$，经验证得$n=48$；若$X_3=48$时，此时$49\leq n\leq 95$，将其$49\leq n\leq 95$逐一代入$n-\varphi(\varphi(n))=48$，即$\varphi(\varphi(n))=n-48$，经验证得$n=54,56,64$，综上，当$X_2=16$时，$n=36,38,40,48,54,56,64$.

当$X_2=20$时，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3=25,33,44,50,66$。若$X_3=25$时，此时$26\leq n\leq 49$，将其$n$逐一代入$n-\varphi(\varphi(n))=25$，即$\varphi(\varphi(n))=n-25$，经检验得，$n=33$；若$X_3=44$时，此时45≤n≤87，将其$n$逐一代入$n-\varphi(\varphi(n)\;=4$

，即 $\varphi(\varphi(n))=n-4$，经检验得，$n=52$；若 $X_3=33,50,66$ 时，经检验得此时方程（2）无解；综上，当 $X_2=20$ 时，$n=33,52$ 满足方程（2）.

当 $X_2=24$ 时，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3=35,39,45,52,56,70,72,78,84,90$。若 $X_3=35$ 时，此时 $36\le n\le 69$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=35$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-35$，经检验得，$n=51$；若 $X_3=39$ 时，此时 $40\le n\le 77$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=39$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-39$，经检验得此时方程（2）无解；若 $X_3=45$ 时，此时 $46\le n\le 89$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=45$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-45$，经检验得 $n=57,61$；若 $X_3=52$ 时，此时 $53\le n\le 103$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=52$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-52$，经检验得 $n=60,68$；若 $X_3=56$ 时，此时 $57\le n\le 111$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=56$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-56$，经检验得此时方程（2）无解；若 $X_3=70$ 时，此时 $71\le n\le 139$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=70$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-70$，经检验得 $n=78$；若 $X_3=72$ 时，此时 $73\le n\le 143$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=70$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-70$，经检验得 $n=78$；若 $X_3=78$ 时，此时 $79\le n\le 155$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=78$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-78$，经检验得此时方程（2）无解；若 $X_3=84$ 时，此时 $85\le n\le 167$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=84$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-84$，经检验得 $n=100$；若 $X_3=90$ 时，此时 $91\le n\le 179$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=90$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-90$，经检验得 $n=118$，综上当 $X_2=24$ 时，$n=51,57,60,61,68,78,100,118$ 满足方程（2）.

当 $X_2=30$ 时，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3=31,62$。若 $X_3=31$ 时，此时 $32\le n\le 61$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=31$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-31$，经检验得，$n=39,43$；若 $X_3=62$ 时，此时 $63\le n\le 123$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=62$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-62$，经检验得，$n=70,74$。综上当 $X_2=30$ 时，$n=39,43,70,74$ 满足方程（2）.

情形 3；若 $X_1=10$，令 $X_2=\varphi(n-\varphi(\varphi(n)))$，则 $X_2=11,22$.

当 $X_2=11$ 时，由引理可得，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3$，此时方程（2）无解。

当 $X_2=22$ 时，由引理可得，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3=23,46$. 若 $X_3=23$ 时，此时 $24\le n\le 45$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=23$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-23$，经检验得，$n=31$；若 $X_3=46$ 时，此时 $47\le n\le 91$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=46$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-46$，经检验得，$n=58$，综上，当 $n=31,58$ 满足方程（2）.

情形 4；若 $X_1=12$，令 $X_2=\varphi(n-\varphi(\varphi(n)))$，则 $X_2=13,21,26,28,36,42$.

当 $X_2=13,21,26$ 时，由引理可得，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3$，此时方程（2）无解。

当 $X_2=28$ 时，由引理可得，$n-\varphi(\varphi(n))=X_3=29,58$. 若 $X_3=29$ 时，此时 $30\le n\le 57$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=29$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-29$，经检验得，$n=53$；若 $X_3=58$ 时，此时 $59\le n\le 115$，将其 n 逐一代入 $n-\varphi(\varphi(n))=58$，即 $\varphi(\varphi(n))=n-58$，经检验得，$n=66$；综上，当 $n=53,66$ 满足方程（2）.

综上所述，复合欧拉函数方程 $\varphi[\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))]=4$ 的正整数解为

$n=31,33,36,38,39,40,43,48,51,52,53,54,56,57,58,60,61,64,66,68,70,74,78,100,118$

. 证毕.

参考文献：

[1] 田呈亮，付静，白维组. 一个包含Euler函数的方程[J]. 纯粹数学与应用数学，2010,26（1）：96-98.

[2] 袁合才，王波，王晓峰. 复合欧拉函数方程 $\varphi(\varphi(n-\varphi(\varphi(n))))=4,6$ 的正整数解[J]. 2018,48（11）:260-262.

[3] 张文鹏，《初等数论》[M]. 陕西师范大学出版社，120-123.

[4] 王洋，张四保. 一个带有复合Euler函数方程的正整数解[J]. 东北师范大学学报，2017,49（2）:21-24.

作者简介：张永华，男，陕西华阴人，安康职业技术学院基础教学部讲师，硕士，研究方向：非线性动力系统。

安康职业技术学院2020年度院级科学研究项目（AZJKY2020025）