

基于波利亚解题思想对解决中考压轴题的思考

——以2021年广东中考第25题为例

李孟杰

佛山科学技术学院、数学与大数据学院 广东 佛山 528000

[摘要] 本文以2021年广东中考第25题为例,利用波利亚解题教学的思想,提供解题教学的细化模型,引导学生探索清晰的解题思路,培养学生高素质的数学思维,在解决难题后获得成就感,提高学生对数学的兴趣。

[关键词] 波利亚; 怎样解题表; 解题教学

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2021.12.165

一、背景分析

新课标指出,学习者在获得知识技能的过程中,只有亲身参与教学活动,才能在数学思考、问题解决和情感态度这三个方面得到应有的发展。而压轴题考察学生基础知识的运用能力,并且在常规的基础上加入较为综合的内容,让学生的综合素质有所提高,其本质反映了数学核心素养的基本要求;同时也可以发展自身的潜力,不局限于书本,拓展自己的思维思考方式。但是在学习的过程中,有可能会产生畏难情绪的出现,中考数学压轴题具有高分值,这样就不容易达到理想的成绩,一旦放弃就会影响学生在数学方面的积极性,导致学生在数学学习方面的热情不高。

二、考题呈现

例:已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1, 0)$,且对任意实数 x ,都有 $4x-12 \leq ax^2+bx+c \leq 2x^2-8x+6$ 。

(1)求该二次函数的解析式;(2)若(1)中二次函数图象与 x 轴的正半轴交点为 A ,与 y 轴交点为 C ;点 M 是(1)中二次函数图象上的动点,问在 x 轴上是否存在点 N ,使得以 A 、

C 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形.若存在,求出所有满足条件的点 N 的坐标;若不存在,请说明理由。

解法分析:此压轴题的难度结构不同于原来的模式,以往的中考压轴题都是每个小题的难度都逐渐递增,但是这道题是第一小题难度大于第二小题。第一小题相比历年广东中考压轴题,无论是结构还是知识点都特别新颖,往年通过一些简单的带入,就可以得到二次函数的解析式。而此题只给出了二次函数中的一个点,并且给出了一个既包含一次又包含二次的连续不等式。这是本次中考的创新点,也是难点,不仅考察学生对基础知识的理解能力和数学基本的运算能力,还考察学生的综合分析和独立钻研的能力,体现了“能力立意”的命题原则。但这道小题相比往年压轴题简便之处在于不需要作复杂的辅助线,也没有运动变化的复杂讨论。第一小题主要考察一次函数的图形和性质、二次函数的图象和性质,以及二次连续不等式、二次函数恒成立的问题。

第二小题是一个平行四边形存在性的问题,相较于第一小题来说,比较常规,主要考察的知识点为平行四边形的判

	第(1)小题	第(2)小题
未知是什么?	二次函数的解析式	点 N 的存在性及其坐标
已知是什么?	ax^2+bx+c 过点 $(-1, 0)$	二次函数的解析式
条件是什么?	$4x-12 \leq ax^2+bx+c \leq 2x^2-8x+6$	A 是与 x 轴的正半轴交点, C 是与 y 轴交点,点 M 的动点, N 点在 x 轴上,构成平行四边形.
把条件分开	$4x-12 \leq 2x^2-8x+6$; $4x-12 \leq ax^2+bx+c$ $ax^2+bx+c \leq 2x^2-8x+6$	A 、 C 、 M 、 N 各点的限制条件 A 、 C 、 M 、 N 构成平行四边形
条件是否充分?	只知道函数过点 $(-1, 0)$,利用分开的条件,思考是否能将已知和未知联系起来.	当函数表达式确定时 A 、 C 和 N 点的纵坐标和 M 点横纵坐标的关系都是确定的,故条件充分.
画张图,引入恰当的符号		

定、平行四边形的性质以及坐标系中的平移和中点坐标的表达方法等知识点，重点考察学生的分类讨论能力和数学运算能力。两个小题之间关系密切。

第一种解法是利用第一题的解析式，求解得到A、C两点的坐标，由题目可知四个点构成平行四边形是没有顺序的，学生很容易联想到平行四边形的判定定理：对角线相互平分的四边形是平行四边形，结合中点坐标公式，再进行不同情况下的分类讨论，知识之间有较强的关联性，且平行四边形的判定和是学生接触较多的问题，所以此法是大部分学生倾向采取的方法。第二种解法利用平行四边形另一条判定定

理：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，将平行四边形和二次函数的图形与其对应的性质相结合，体现了学生数形结合的素质，知识之间的联系性强，思维过渡自然，大部分学生容易联想到这种方法，但是需要学生有缜密的逻辑推理能力和想象能力，才能准确且无遗漏的找到四种满足题意的N点坐标。故本文选择引导学生掌握第二小题的方法一。

三、利用《怎样解题表》的剖析

(一) 弄清问题

(二) 拟定计划

在求解第(2)小题时，由(1)题的条件很容易求出A、

	你能否从已知中导出某些有用的东西？	你是否知道与此有关问题？你是否知道一个可能用得上的定理？	为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？
第(2)小题	已知二次函数的表达式，可以表示出点A、和点C的坐标。	知道，平行四边形的判定定理，可以用“对边平行且相等的四边形为平行四边形”判定定理；也可以用“对角线互相平分的四边形为平行四边形”判定定理。	为了利用平行四边形的判定定理，需要将四个点的坐标都表示出来，才能利用平面直角坐标系内点的关系求出未知N的坐标。N点在x轴上可以用只含一个未知量得字母表示出N的坐标。M点在二次函数上，可以用只含一个未知量得字母表示出M的坐标。

C两点的坐标，教师可以通过第二个问题引导学生寻找认知中已有的知识储备，选择适合本题的平行四边形判定定理，并通过第三个问题引导学生从点的坐标之间的关系，进行讨论和思考，从条件和认知中抽象出四个点的关系，自主探究出N点坐标的多样性。

(三) 实施计划

在制定好解题计划之后，就开始进行耗时最多且最关键的环节，在实现每一步的求解计划时，首先要保证认知系统提取的正确性，其次要保证代数计算的精确无误，注意到题目条件和定理运用的每个细节，每一步细化的解题之路上都做到“眼观六路、耳听八方”的睿智。上一步制定的计划并不是完全严苛不变的，若在某一个环节出现了差池，则应该及时调整预设的思路，通过不断试误才能寻找出正确的解题方法。例如上述的第二小题，在选择平行四边形的判定定理时，学生初次尝试求解时可能选择了“对边平行且相等的四边形为平行四边形”的判定定理，但在平移的过程中忘记了二次函数对称性质的运用，导致难以求解点M的坐标，学生可能会就此放弃此题，但如果转换思路，运用另一条判定定理，就能有效避免这个认知上的缺失，使求解过程回归正轨。

(四) 回顾

这是最重要也是最容易忽视的一个环节，数学题目的变化层出不穷，只记住基础知识和简单解题方法很难在中考中脱颖而出，要想形成数学的思维方式和较高的数学素养，这一解题步骤是十分关键的。此时学生刚进行火热的思考之

后，头脑中还存在着新鲜的思路过程，及时反思在前三个步骤中没有察觉到和可以完善的地方，再反思是否能用别的方法导出这个结果，独立探索出解题方法的多样性，经历一个“再创造”的过程。

四、教学反思

波利亚的《怎样解题表》是通过问题启迪智慧，让学生思考自己的思考，达到元认知能力的提升，这种方式十分适合压轴题的教学。压轴题的命题思路在于人的独特能力，要求学生有较高的数学素养，包括推理能力、抽象能力、想象力和创造力等，所以教师在进行压轴题解题教学时，本文有以下几点反思：

1. 启发学生“思考自己的思考”，提升审题能力和元认知监控能力。
2. 建立细化的解题模型，引导学生充分利用已知和条件。
3. 强调回顾与反思，巧用变式教学和开放性教学，培养学生再创造的能力。

参考文献

[1] G. 波利亚. 怎样解题[M]. 上海科技教育出版社: 上海, 2011.

[2] G. 波利亚. 数学的发现--对解题的理解、研究和讲授[M]. 科学出版社: 北京, 2006.

[3] 张雁. 基于波利亚解题思想的解题教学思考——以2020年高考全国II卷理科数学第21题为例[J]. 中学教学研究(华南师范大学版), 2021(12): 37-41.