

2020年高考数学全国卷III理科第20题解法探究

周艺璇

四川民族学院理工学院

[摘要] 利用设点法、设线法、参数法等10种解法求解2020年高考数学全国卷III理科第20题, 以此创新学生思维模式、拓宽学生解题思路。^[1]

[关键词] 高考试题; 解法探究

[DOI] 10.12252/j.issn.2096-627X.2021.12.845

本文给出2020年高考数学全国卷III理科第20题的10种解法, 仅供参考。原题如下: 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (0 < m < 5)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$, A、B分别为C的左、右顶点。(1)求C的方程。(2)若点P在C上, 点Q在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP \perp BQ$, 求 $S_{\Delta APQ}$ 。

本题主要考查了求椭圆标准方程和求三角形面积问题, 解题关键是掌握椭圆离心率定义和数形结合求三角形面积的方法, 涉及到的知识点包括但不限于已知两点求斜率、两条直线垂直时斜率之间的关系、点斜式方程、两点式方程、弦长公式、两点间的距离公式、点到直线的距离公式、全等三角形的判别、海伦公式、向量内积和外积的计算公式、直线参数方程等。以上知识点, 独立来看都不难掌握。难度不大, 旨在考查学生的分析能力和计算能力, 属于中档题。

题目第(1)问, 直接套用离心率公式即可求得 m^2 的值, 从而写出椭圆方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$ 。

笔者介绍的10种解法主要是针对题目第(2)问。而题目第(2)问的解法, 可分为3大类, 分别是设点法(法1-3)、设线法(法4-8)和参数法(法9-10)。

(2)法1: 根据对称性设 $y_Q > 0$, $Q(6, y_Q)$ 。过P、Q分别作x轴的垂线, 垂足分别为M、N, 连接AQ、AP、BQ、BP。显然, $\Delta PBM \cong \Delta BQN$ (AAS)。所以 $|BM|=|QN|$, $|PM|=|BN|$ 。而 $B(5, 0)$, $P(5-y_Q, 1)$ 。代入C的方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1$, 解得 $y_Q=2$ 或8。当 $y_Q=2$ 时, $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 、 $A(-5, 0)$ 。所以 $S_{\Delta APQ} = S_{\Delta AQN} - S_{\Delta APM} - S_{\Delta PQM} = \frac{1}{2} \times 11 \times 2 - \frac{1}{2} \times 8 \times 1 - \frac{1}{2} \times (1+2) \times 3 = \frac{5}{2}$ 。

当 $y_Q=8$ 时同理。

评注: 将已知条件转化通过全等为关键点P的坐标信息, 再代入椭圆方程求得P、Q坐标。在三角形面积的计算方法选取上, 采用添补法转化为易于计算的图形面积。

法2: y_Q 的求解参考法1。当 $y_Q=2$ 时, $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 、

$A(-5, 0)$ 。则 $|AQ| = \sqrt{125}$, $|PQ| = \sqrt{10}$, $|AP| = \sqrt{65}$ 。令 $\mu = \frac{|AQ|+|PQ|+|AP|}{2}$, 则由海伦公式可算 $S_{\Delta APQ} = \sqrt{\mu(\mu-|AQ|)(\mu-|PQ|)(\mu-|AP|)} = \frac{5}{2}$ 。当 $y_Q=8$ 时同理。

评注: 海伦公式是高中数学必修⑤第一章的补充内容, 一般用于三角形高的计算比较复杂的情况。用海伦公式求三角形面积的方法不算常规, 但它结构工整, 便于记忆。

法3: 设 $P(x_P, y_P)$, $Q(6, y_Q)$, 根据对称性可设 $y_Q > 0$, 而 $y_P > 0$ 且 $B(5, 0)$ 。所以 $\overline{BP} = (x_P-5, y_P)$, $\overline{BQ} = (1, y_Q)$ 。由 $BP \perp BQ$ 可得 $x_P-5 + y_P y_Q = 0$ ①。由 $|BP|=|BQ|$, 得 $(x_P-5)^2 + y_P^2 = 1 + y_Q^2$ ②。把①代入②, 得 $y_P=1$ 。由P在椭圆上, 得 $\frac{x_P^2}{25} + \frac{16}{25} = 1$, 解得 $x_P=3$ 或-3。当 $x_P=3$ 时, $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 、 $A(-5, 0)$ 。于是 $\overline{AP} = (8, 1)$, $\overline{AQ} = (11, 2)$ 。所以

$$S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} |\overline{AP} \cdot \overline{AQ}| \sin \langle \overline{AP}, \overline{AQ} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AP}|^2 \cdot |\overline{AQ}|^2 - (\overline{AP} \cdot \overline{AQ})^2} = \frac{5}{2}。$$

当 $x_P=-3$ 时同理。

评注: 向量法书写简单、公式明了, 能将技巧型解题思路转化为算法型解题思路。

法4: 设 $P(x_P, y_P)$, $Q(6, y_Q)$, 根据对称性设 $y_Q > 0$, 而 $y_P > 0$ 且 $B(5, 0)$ 。由于 $BP \perp BQ$, 于是直线BP的方程为 $y = -\frac{1}{y_Q}(x-5)$ 。由弦长公式得 $|BP| = \sqrt{1+y_Q^2}$, 由两点间的距离公式得 $|BQ| = \sqrt{1+y_Q^2}$ 。因为 $|BP|=|BQ|$, 所以 $y_P=1$ 。将 $y_P=1$ 代入椭圆方程, 解得 $x_P=3$ 或-3。当 $x_P=3$ 时 $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 。于是 $|PQ| = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$, 直线PQ的方程为 $x-3y=0$ 。点 $A(-5, 0)$ 到直线PQ的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 。故 $S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = \frac{5}{2}$ 。当 $x_P=-3$ 时同理。

评注: 此法看似简单, 对学生几何知识的转化和应用的能力却是有一定要求的。

法5: 设 $Q(6, y_Q)$, 根据对称性可设 $y_Q > 0$, 且 $B(5, 0)$ 。由 $BP \perp BQ$, 得直线BP的方程为 $y = -\frac{1}{y_Q}(x-5)$, 与椭圆方程联

立 $\begin{cases} x = -y_Q y + 5 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{25} = 1 \end{cases}$ 。所以 $P(\frac{80-5y_Q^2}{16+y_Q^2}, \frac{10y_Q}{16+y_Q^2})$ 。由

$|BP|=|BQ|$, 得 $(\frac{80-5y_Q^2}{16+y_Q^2}-5)^2+(\frac{10y_Q}{16+y_Q^2})^2=1+y_Q^2$, 解得 $y_Q=2$ 或

$y_Q=8$ 。当 $y_Q=2$ 时, $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 、 $A(-5, 0)$ 。所以

$$S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}。 \text{当 } y_Q=8 \text{ 时同理。}$$

评注: 已知三点的坐标, 可使用解析公式一

$$S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} \text{ 计算三角形面积。}$$

除法10以外, 后文三角形面积的算法均参照法1到法5。

法6: 由题可得 $B(5, 0)$ 。设直线BP的方程为 $y=k(x-5)$ 。根据对称性设 $k<0$ 。联立方程 $\begin{cases} y = k(x-5) \\ x^2 + \frac{16y^2}{25} = 1 \end{cases}$ 得 $P(\frac{80k^2-5}{1+16k^2}, \frac{-10k}{16+k^2})$,

$$|PB|^2 = \frac{100}{(1+16k^2)^2} + \frac{100k^2}{(1+16k^2)^2}。 \text{由 } BP \perp BQ \text{ 设直线BQ的方程为}$$

$y=-\frac{1}{k}(x-5)$ 。所以 $Q(6, -\frac{1}{k})$, $|BQ|^2 = 1 + \frac{1}{k^2}$ 。由 $|BP|=|BQ|$

$$\text{知 } \frac{100}{(1+16k^2)^2} + \frac{100k^2}{(1+16k^2)^2} = 1 + \frac{1}{k^2}, \text{ 解得 } k = -\frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{8}。 \text{当}$$

$k = -\frac{1}{2}$ 时, $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 、 $A(-5, 0)$ 。当 $k = -\frac{1}{8}$ 时, $P(-3, 1)$ 、 $Q(6, 8)$ 、 $A(-5, 0)$ 。

法7: 由题可得 $B(5, 0)$ 。设直线BP的方程为 $x=ty+5$, 后面同法6。

法8: 由题可得 $A(-5, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 。设直线AP的方程为 $y=k(x+5)$ 。根据对称性令 $k>0$ 。联立方程 $\begin{cases} y = k(x+5) \\ x^2 + \frac{16y^2}{25} = 1 \end{cases}$ 得

$$P(\frac{-80k^2+5}{1+16k^2}, \frac{10k}{16+k^2})。 \text{于是 } |PB|^2 = \frac{160^2k^4}{(1+16k^2)^2} + \frac{100k^2}{(1+16k^2)^2},$$

$k_{PB} = -\frac{1}{16k}$ 。因为 $BP \perp BQ$, 所以直线BQ的方程为 $y=16k(x-5)$,

$Q(6, 16k)$ 。于是 $|BQ|^2 = 1 + (16k)^2$ 。由 $|BP|=|BQ|$ 知

$$\frac{160^2k^4}{(1+16k^2)^2} + \frac{100k^2}{(1+16k^2)^2}, \text{ 解得 } k = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{1}{8}。 \text{当 } k = \frac{1}{2} \text{ 时, } P(3, 1)、$$

$Q(6, 2)$ 、 $A(-5, 0)$ 。当 $k = \frac{1}{8}$ 时, $P(-3, 1)$ 、 $Q(6, 8)$ 、 $A(-5, 0)$ 。

评注: 法5-8本质上是一个解题思路: 通过斜率设出直线方程并与椭圆方程联立。用斜率表示关键点P的坐标, 然后根据已知条件表示出Q的坐标。建立方程求解得到斜率的值。

法9: 由题可得 $B(5, 0)$ 。假设直线BQ的参数方程为

$$\begin{cases} y = t \sin \alpha \\ x = 5 + t \cos \alpha \end{cases}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})。 \text{当 } x=6 \text{ 时, } t = \frac{1}{\cos \alpha} = |BQ|。 \text{由}$$

于 $BP \perp BQ$, 则直线BP的参数方程为 $\begin{cases} y = t \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ x = 5 + t \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ 代

入椭圆方程得 $t = 0$ 或 $t = \frac{10 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + 16 \cos^2 \alpha}$ 。所以

$$|BP| = \frac{10 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + 16 \cos^2 \alpha}。 \text{由 } |BP|=|BQ|, \text{ 得 } \frac{10 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + 16 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

, 解得 $\tan \alpha = 2$ 或 8 。当 $\tan \alpha = 2$ 时, $P(3, 1)$ 、 $Q(6, 2)$ 、 $A(-5, 0)$ 。当 $\tan \alpha = 8$ 时, $P(-3, 1)$ 、 $Q(6, 8)$ 、 $A(-5, 0)$ 。

法10: 设 $P(5 \cos \theta, \frac{5}{4} \sin \theta)$, $Q(6, y_Q)$, 则 $\overrightarrow{BP} = (5 \cos \theta - 5, \frac{5}{4} \sin \theta)$, $\overrightarrow{BQ} = (1, y_Q)$ 。由 $BP \perp BQ$ 知 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$ 。即 $5 \cos \theta - 5 + \frac{5}{4} y_Q \sin \theta = 0$ 。由 $|BP|=|BQ|$, 得 $(5 \cos \theta - 5)^2 + (\frac{5}{4} \sin \theta)^2 = 1 + (y_Q)^2$ 。解得 $(\frac{5}{4} \sin \theta)^2 = 1$,

$$y_Q = \frac{5-5 \cos \theta}{\frac{5}{4} \sin \theta}。 S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 5 \cos \theta + 5 & \frac{5}{4} \sin \theta \\ 11 & y_Q \end{vmatrix} \right| = \frac{5}{2} \left| (\cos \theta + 1) \cdot \frac{5-5 \cos \theta}{\frac{5}{4} \sin \theta} - \frac{11}{4} \sin \theta \right| = \frac{5}{2} \left| \frac{5}{4} \sin \theta \right| = \frac{5}{2}。$$

评注: 参数法作为解题的“桥梁”, 将几何和代数联系在一起, 能大大降低计算的复杂程度。

通过对2020年高考试题的解法探究, 除了能帮助学生深层次沟通、理解和掌握知识以外, 还可以提高学生观察、分析、解决问题的能力。尤其是圆锥曲线问题, 做此类训练是必不可少的。从效果上讲, 从多角度思考, 尝试不同的解题方法对知识的转化、思维的创新、数学素养的提升都有着重要重用。[2]

参考文献:

[1] 杜蓉蓉. “一题多解”在高中数学教学中的应用探索探析[J]. 农家参谋, 2020, 14: 205.

[2] 崔静静, 赵思林. 一道考研数学试题的多种解法[J]. 西昌学院学报(自然科学版), 2018, 32(4): 54-56.

基金项目: 四川民族学院“基于BOPPPS模型的有效课堂设计——以《高等数学》为例”校级教改课题(JG202138)。

作者简介: 周艺璇(1993-), 女, 四川南充, 助教, 硕士学位, 研究方向: 半环上的线性代数。