

基于数学建模核心素养的教学设计

——以“二次函数的应用”为例

文姿方 刘灯明

湖南科技大学 湖南 湘潭 411100

[摘要]二次函数是初中数学中重要内容,通过创设特定的问题情境,引导学生主动思考,分析数量关系,辨别变量之间依存关系,建立函数模型,用二次函数解决实际问题,这一系列的解题过程中培养学生用数学思维分析解决问题,渗透数学建模的核心素养。

[关键词]数学建模;二次函数;教学设计

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.12.1374

1. 二次函数与数学建模核心素养

克莱因提出“以函数为纲”的思想;莱布尼茨也提倡重视函数。章建跃认为,数学问题解决需要模型思想。培养学生数学建模的能力是发展和培养学生的数学建模素养的关键。二次函数的应用旨在考查学生的数学建模能力,在教学中教师要为学生创造有利于发展数学建模能力的问题情境,学生主动思考问题,分析数据,建立二次函数模型。数学与生活是密切联系的,各个阶段的数学教学都要重视将数学课本知识与实际生活衔接,使学生体会到数学的重要性、数学建模的重要性。

2. 基于数学建模核心素养的教学设计研究与分析

数学核心素养的实质是数学核心能力,也是数学思维的基础。数学核心素养下的教学设计需要经过反复推敲、思考以及创新,二次函数作为中考的必考内容,近几年湘潭市的中考卷中关于“二次函数”的考点常以一道简单的选择题以及一道复杂的解答题形式出现,可见二次函数在初中数学中的重要地位。

2.1 教材分析

“二次函数”是湘教版初中数学九年级下册第一章第五节的内容,在整个学习二次函数的过程中,学生学习从特殊到一般的研究方法。对学生上高中后学习和研究三角函数具有承上启下的作用;二次函数是描述变量之间关系的数学模型,对提升学生建立函数模型、运用函数思想来解决现实生活问题非常重要。

2.2 学情分析

学生在本节课之前已经学习了正比例函数、一次函数、反比例函数,初步掌握研究函数方法和过程,学习了二次函数概念、表达式以及性质,现在研究二次函数的应用。初三学生的身心发展趋于成熟,学生的数学建模素养水平能满足本节课的要求。这为本节课的顺利开展提供了基础经验和能力。

2.3 教学目标

将《课标》同教材分析、学情分析相结合,制定了如下教学目标。

(1) 知识与技能目标:掌握二次函数的性质和图象,能用解析法表示实际问题中变量的函数关系进行数学建模并解决实际问题。

(2) 过程与方法目标:探索归纳二次函数的特征,运用数形结合方法对问题进行分析,建立二次函数模型、提高数学建模能力。

(3) 情感态度与价值观目标:感受数学与生活实际问题

之间的联系,体会生活数学化。

2.4 教学重难点

重点:掌握二次函数的性质和图象,对生活实际问题进行数学建模。

难点:正确地问题情境中抽象出函数关系,建立二次函数模型。

2.5 教学方法

为了帮助学生更好的学习二次函数,让核心素养渗透到二次函数的应用教学中,主要以问题式教学法、发现式学习方法为主。

2.6 教学过程

2.6.1 复习导入、温故知新

1. 回顾二次函数的概念、性质、图象。

2. 请学生回答二次函数与一元二次方程的联系。

设计意图:复习旧知有助于加深学生对二次函数的概念掌握程度,进而更好地确保二次函数的应用教学的顺利开展。

2.6.2 启发引导、建立模型

一座拱桥的纵截面是抛物线的一部分,拱桥的跨度是4.9,当水面宽度4时,拱顶离水面2,若想了解水面宽度变化时,拱顶离水面高度怎样变化,你能建立函数模型来解决这个问题吗?

问题1:拱桥的纵截面是抛物线的一部分,这句话如何理解?抛物线是什么函数的图象?

帮助学生解读题意,“纵截面”是指沿着垂直于水平方向切出的平面,即在长度方向的截面。例如圆柱的纵截面是长方形,圆锥的纵截面是三角形。学生充分理解纵截面的概念后再思考拱桥的纵截面是怎样的?老师再通过动画演示验证拱桥的纵截面,即抛物线的一部分图象,学生通过自己思考后得出结论,可以用二次函数模型来表示出拱桥的纵截面是抛物线的那一部分。

问题2:如何在直角坐标系中确定这个拱桥的顶点、对称轴?

拱桥纵截面抛物线的那一部分用二次函数来表示,首先我们应该建立直角坐标系,显然以拱顶为原点,抛物线的对称轴为轴。如果不这样确定拱桥的顶点和对称轴,对求解拱桥的表达式没有影响,只不过会让解题过程更加复杂。

问题3:我们已经知道用二次函数模型来表示出拱桥的纵截面是抛物线的那一部分,你能确定这条抛物线的二次函数表达式吗?

学生会优先考虑二次函数的标准式 $y=ax^2+bx+c$,这反而

将问题复杂化。

问题4: 二次函数的表达式可能存在哪些形式? 他们有什么共同点?

学生分别画出 $y=ax^2+bx+c$ 、 $y=ax^2+bx$ 、 $y=ax^2$ 三种情形的二次函数图象, 观察发现他们图象都是抛物线, 且都可以通过相互平移得到 $y=ax^2$ 的图象, 最后学生一致发现 $y=ax^2$ 的顶点在y轴上更适合来表达拱桥的纵截面中抛物线的那一部分, 使计算过程更为简单快捷, 因此选择设这条抛物线的二次函数表达式为 $y=ax^2$ 。

问题5: 当水面宽度4m时, 拱顶离水面2m, 我们可以得到函数图象上的一个特殊点的坐标是?

得到点A(2, 2)在抛物线上, 将点代入由此得出 $y=ax^2$, 由此得出 $-2=a \cdot 2^2$, 解得 $a=-\frac{1}{2}$, 因此, 这个函数表达式是 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 。

问题6: 关于拱桥纵截面的抛物线表达式已建立, 现在请分析二次函数图象, 你可以得出哪些重要数据及结论?

水面宽度是 $2|x|$, 拱顶离水面高度的相反数是y, 所以水面到拱顶的高度变化由水面宽度变化而变化。

设计意图: 数学建模是一个通过构建数学模型解决实际问题的过程, 是具创造性的数学活动。在用二次函数表示拱桥的纵截面是比较抽象的解题过程中, 教师需要帮助学生分析题干, 教师引导性提问层层推进, 帮助学生完成解题。学生是学习的主体, 有学生积极参与, 主动探究的教学情境才是成功的、有效的。虽然数学建模的方法多样, 但为了便于数学建模的教与学, 数学建模形成一些固定的步骤。

2.6.3模型分析、求最优解

某玩具店引进一批进价20元/件的玩具小汽车, 如果以单价30元/件销售, 那么一个月内可售出180件。根据销售经验, 提高销售单价会导致销售量的下降, 即销售单价每上涨1元, 月销售量将相应减少10件。当销售单价为多少元时, 该店能在一个月内获得最大利润?

问题7: 我们应该怎样求销售利润? 试找到题干中的等量关系?

总利润=单件利润x总销售量, 即可得y与x的函数关系式, 根据题意得 $y=(30+x-20)(180-10x)=-10x^2+18x+180$

问题8: 这道题与二次函数的最值有怎样的关系? 销售单价为多少元时, 该店能在一个月内获得最大利润?

将二次函数 $y=-10x^2+18x+180$ 配方成顶点式二次函数即 $y=-10(x-4)^2+1960$, 得到顶点坐标为(4, 1960), 所以当 $x=4$ 时, 售价为34元时, 一个月的总利润y取最大值为1960。

设计意图: 从核心素养的角度研究模型思想和数学建模, 已是我国数学教育界研究的热门话题。设计这道关于用二次函数求最大利润的问题, 让学生感受到抽象的二次函数可以解决销售求最大利润方面的问题, 即二次函数的顶点式求最值的重要性, 体会函数与生活密切相关, 感受数学问题生活化, 生活情境数学化。

2.6.4课堂小结

1. 建立二次函数模型解决问题的基本步骤是什么?

首先由实际问题出发, 建立二次函数模型, 接着利用二次函数的图象和性质求解, 最后得到实际问题的解。

设计意图: 学生归纳概括出数学建模的基本步骤, 提高学生归纳概括能力和巩固已有的二次函数知识结构。

2. 请学生思考我们为什么要学习二次函数? 这与我们生活中又有什么联系?

设计意图: 数学建模能力与数学建模的密切关系, 在学习本节课的内容后, 再让学生思考为什么学习二次函数, 学生发表自己见解, 认识到二次函数的重要性, 不仅仅是因为中考需要, 而是实际生活问题需要二次函数来解答, 学生认识到二次函数的重要性, 学习二次函数的应用事半功倍。

2.6.5作业布置

必做题: 课后习题A组第1题

选做题: 课后习题B组第4题

设计意图: 分层作业可以满足不同学生的学习需要, 每位学生都有所收获。

3. 基于数学建模核心素养的教学设计的策略

3.1创设生活情境、激发学生学习二次函数、建立模型的动机

赖登塔尔认为数学源于现实、根于现实并应用以现实。培养学生的数学建模的核心素养, 可通过二次函数的应用的教学过程得到实现, 在教学中, 教师应尊重学生的主体地位, 以人为本, 以问题为主线, 激发学生学习二次函数应用的兴趣, 渗透数学建模的核心素养。

3.2教师启发引导、鼓励学生思考、探究建立函数模型的路径

孔子是世界上最早提出启发式教学的教育家。在数学课堂中, 教师要研究如何提出恰当的问题, 让学生跟随老师的思维畅游在问题的深入剖析中建立起理论。二次函数教学中教师通过提问启发引导学生思考、学习二次函数的知识。同时, 掌握二次函数知识所蕴含抽象思维的数学思想方法, 渗透数学建模核心素养。基础教育下的核心目的是教会学生学会学习, 同时, 培养学生的数学核心素养。在教学中渗透数学建模的核心素养是各国中学数学课程标准中一个重要的教育目标。

3.3学生数形结合、观察函数图象的关系、建立二次函数模型

华罗庚认为“数无形时少直觉, 形少数时难入微”, 波利亚指出“数形结合能透彻了解数学的本质”。二次函数的应用需要学生充分理解“数形结合”的数学思想方法, 这对初中阶段学生学习函数来说既是一个挑战又是一场考验。作为老师, 我们更应当重视二次函数应用的教学, 挖掘二次函数应用的教学中的“特殊到一般”、“数形结合”的数学思想方法, 在教学中渗透数学建模的核心素养。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社. 2020
 [2] 严士健, 黄楚芳. 义务教育教科书数学九年级(下册)[M]. 湖南: 湖南教育出版社. 2013
 [3] 刘彩华. 数形结合思想在高中数学中的应用现状及渗透研究[C]. 华中师范大学, 2021.
 [4] 牛伟强. 高中生数学建模能力发展研究[C]. 华东师范大学, 2019.
 [5] 李伟. 数学建模导向下解题教学设计的探索与思考——以一道模拟题的解题教学为例[J]. 中国数学教育, 2020, (24): 86-88.

基金资助: 2020年湖南省普通高等学校教学改革研究项目(HNJG-2020-0492)