例说用二次函数求解面积最值问题

顾长伟

东港市职业教育中心

[摘　要]以二次函数为载体，解决几何图形的最值问题，解题方法多样化，并且综合性强，是考试常考的热门题目，也是学生学习的难点。在解题时，循序渐进，步步为营，专项击破，现以一道例题为例，介绍不同的解题方法。

[关键词]二次函数；最值问题；解题方法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2021.12.185

例题：抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴的交点是 $A(1,0)$ $B(-3,0)$ 两点，

（1）求抛物线的解析式

（2）若（1）中的抛物线交 y 轴与 C 点，在该抛物线的对称轴上是否存在点 Q，使 ΔQAC 得周长最小？若存在，求出 Q 点的坐标，若不存在，说明理由。

（3）如图2所示，在（1）中，在第二象限是否存在一点 P，使得 ΔPBC 的面积最大？若存在，求出点 P 的坐标及 ΔPBC 的最大面积；若没有，请说明理由。

解：（1）抛物线方程为 $y=-x^2-2x+3$

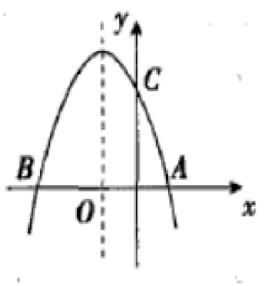

图 1

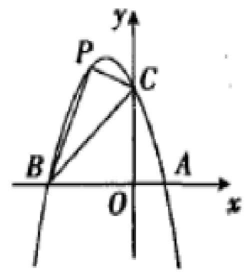

图 2

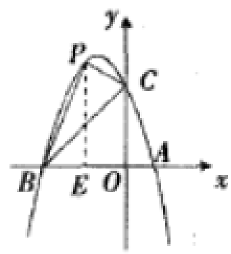

图 3

（2）$Q(-1,2)$

接下来讨论（3）问题中，如下求面积最大值方法

一、补割法

通过对图形进行补割处理，能有效的帮助解题，加快解题速度。应用此法的要点是把几何图形进行分割和补充，能更直观的表示出图形，方便求出面积。

法一、如图3，设 P 点坐标 $P(x,-x^2-2x+3)(-3<x<0)$

$$\because S_{\Delta PBC}=S_{\text{四边形BPCO}}-S_{\Delta BOC}$$

$$=S_{\text{四边形BPCO}}-\frac{9}{2}$$

若 $S_{\text{四边形BPCO}}$ 有最大值，则 $S_{\Delta PBC}$ 就最大

$$S_{\text{四边形BPCO}}=S_{\text{RT}\Delta BOC}+S_{\text{直角梯形}PREOC}$$

$$=\frac{1}{2}BE\cdot PE+\frac{1}{2}OE(PE+OC)$$

$$=\frac{1}{2}(x+3)(-x^2-2x+3)+\frac{1}{2}(-x)(-x^2-2x+3+3)$$

$$=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+\frac{27}{8}$$

当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，$S_{\text{四边形BPCO}}$ 最大值 $=\dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{8}$，

$$\therefore S_{\Delta PBC}\text{最大值}=\frac{9}{2}+\frac{27}{8}-\frac{9}{2}=\frac{27}{8}$$

此时，$-x^2-2x+3=\dfrac{15}{4}$，$\therefore$ 点P坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}\right)$

法二、如图4，设 P 点坐标 $P(x,-x^2-2x+3)(-3<x<0)$

$$\because S_{\Delta PBC}=S_{\Delta\text{OBP}}+S_{\Delta OCP}-S_{\Delta BOC}$$

$$=\frac{1}{2}\times 3(-x^2-2x+3)+\frac{1}{2}\times 3(-x)-\frac{1}{2}\times 3\times 3$$

$$=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+\frac{27}{8}$$

同上略

二、“铅垂高、水平宽”面积法

如图5所示，过 ΔABC 的三个顶点分别作出三条与水平直线垂直的直线，外侧两条垂直直线的距离叫 ΔABC 的水平宽，得出面积公式 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ah$。

解，如图6，作 $PE\perp x$ 于 E，交 BC 于 F

设 $P(x,-x^2-2x+3)(-3<x<0)$

$$\because S_{\Delta PBC}=S_{\Delta\text{BPF}}+S_{\Delta PCF}$$

$$=\frac{1}{2}PF\cdot BE+\frac{1}{2}PF\cdot OE$$

$$=\frac{1}{2}PF(BE+OE)=\frac{1}{2}PF\cdot OB$$

$$=\frac{3}{2}[-x^2-2x+3-(x+3)]$$

$$=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$$

$$\therefore S_{\Delta BPC}\text{最大}=\frac{9}{2}+\frac{27}{8}-\frac{9}{2}=\frac{27}{8}$$

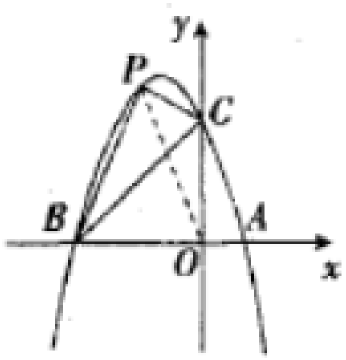

图 4

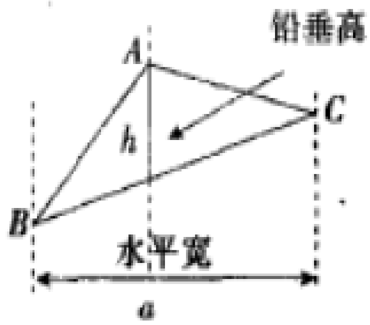

图 5

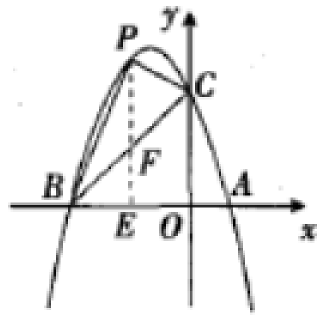

图 6

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$-x^2-2x+3=\frac{15}{4}$

$\therefore$ 点P坐标为$\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$

三、切线法

若 ΔPBC 的面积最大，只有边BC上的高最大，过点 P 做BC边上的平行线l，

当直线l与抛物线有唯一交点 P，BC上的高最大，此时 ΔPBC 的面积最大。具体做法如下：

解，如图7所示，直线BC的方程为$y=x+3$，则l的方程为：$y=x+b$

联立方程 $\begin{cases} y=x+b \\ y=-x^2-2x+3 \end{cases}$

$\therefore x+b=-x^2-2x+3$

即$x^2+3x+b-3=0$

由$\Delta=3^2-4(b-3)=0$

得$b=\frac{21}{4},x=-\frac{3}{2},M\left(0,\frac{21}{4}\right)$

此时BC上的高 h 最大

$h=MC\cdot\sin\angle CMP$

$=MC\cdot\sin\angle OCB$

$=\frac{9}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$

$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot h$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{8}=\frac{27}{8}$

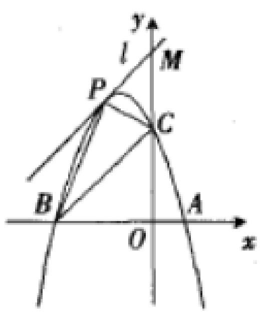

图 7

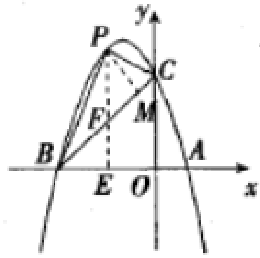

图 8

四、三角函数法

直接采用三角函数法求面积最大

解如图8所示，做作 $PE\perp x$ 于 E，交 BC 于 F，作 $PM\perp BC$ 于点 M，

设$P(x,-x^2-2x+3)(-3<x<0)$，

则 $F(x,x+3)$

$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}BC\cdot PM$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times PF\cdot\sin\angle PFM$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}[(-x^2-2x+3)-(x+3)]\times\sin\angle BFE$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}[(-x^2-2x+3)-(x+3)]\times\sin\angle OCB$

$=\frac{3}{2}(-x^2-3x)$

$=-\frac{3}{2}(x+\frac{3}{2})^2+\frac{27}{8},$

$\therefore S_{\Delta BPC}$最大$=\frac{9}{2}+\frac{27}{8}-\frac{9}{2}=\frac{27}{8}.$

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$-x^2-2x+3=\frac{15}{4}$

$\therefore$ 点P坐标为$\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$

综上，共用四种方法解决求三角形面积最大的问题。解题思路是过点 P 做辅助线，再找出元素关系求解，归纳总结出一题多解的方法，帮助学生提高解题速度和效率，培养学生勇于探索和钻研的精神。

参考文献

[1]罗芳涌.关于高中二次函数教学的几点体会[J].科技风，2020（12）：38.

[2]蒋文荣，谭势威.基于Hawgent皓骏的二次函数最值问题的积件设计与教学应用[J].数学之友，2019（04）：80-81.

[3]张峰.关于二次函数最值问题的教学研究[J].科学大众（科学教育），2017（10）：18.

[4]赵军.基于“让学引思”背景下课堂教学的实践与思考---以二次函数最值问题的变式探究为例[J].中学数学杂志，2017（08）：24-27.