用微分数列函数之和解微分方程式

杨家驹[1, 2]

1.DPS 国际学院；2.SSTC 国际学院

摘　要：新加坡教育部联合剑桥大学举办的新加坡高考，高级数学的考纲包含用欧拉法，Euler method，$\delta y=(dy/dx)\delta x$和欧拉改良法，Improved Euler Method，解普通微分方程式，但是这两个方法都不正确。本文用 $(dy)n=\sum_{r=1}^{n}\frac{[y^{(r)}(\delta x)^r]}{r!}$ 微分数列函数之和，可正确精解普通微分方程式，其中$(dy)_n$见定义1.1，$y^{(r)}=\frac{d^ry}{dx^r}$。

以上式子亦可拓展成

$$(df)_n = (df)_{n-1}+\sum_{r=0}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\frac{(\delta x)^{n-r}(\delta y)^r}{(n-r)!r!}\quad \forall n\geq 1 \text{ 且 } n\in\mathbf{Z}^+$$

$$= (df)_{n-1}+\frac{1}{n!}[(\delta x)\frac{\partial}{\partial x}+(\delta y)\frac{\partial}{\partial y}]^n f\quad \forall n\geq 1 \text{ 且 } n\in\mathbf{Z}^+\quad \textbf{注：}(df)_0=0$$

以上函数数列之和的等式，应可用归纳法证得，亦可以被利用来正确精解偏微分方程式。

关键词：欧拉改良法；数值解普通和偏微分方程式法；数值求函数和积分法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2022.01.019

一、定义

1.定义:n阶准确度y的变化量，$(dy)_n$

如果$y=f(x)$，并且$f(x)$有至少n次的导数$\forall x\in R$，那么，n阶准确度y的变化量，$(dy)_n$对应到一个x的变化量δx是：

$$(dy)n=\sum_{r=1}^{n}\frac{[y^{(r)}(\delta x)^r]}{r!}\qquad (A.1)$$

$y^{(r)}$可以用x，y和$y^{(n)}\forall n<r$表示，其中$y^{(r)}=\frac{d^ry}{dx^r}$。

当$n=1$，$(dy)_1$可表示为dy

例如：

$$\begin{aligned} y &= x^4;\\ \delta y &= (x+\delta x)^4-x^4\\ \delta y &= 4x^3\delta x+6x^2(\delta x)^2+4x(\delta x)^3+(\delta x)^4\\ dy &= (dy)_1 = 4x^3(\delta x) \quad \text{（1 阶准确度 } y \text{ 的变化量，}\delta y\text{）}\\ (dy)_2 &= 4x^3(\delta x)+12x^2(\delta x)^2/2! \quad \text{（2 阶准确度 } y \text{ 的变化量，}\delta y\text{）}\end{aligned}$$

2.定义:n阶准确度y值的估量，$(y)_n$

从以上定义，很明显的可以得出n阶准确度y值的估量，$(y)_n$是：

$$(y)_n = y_0+\sum_{r=1}^{n}[f^{(r)}(x_0)\frac{(\delta x)^r}{r!}],\ \text{其中 } f^{(r)}=y^{(r)}=\frac{d^ry}{dx^r}。$$

其中$y_0=f(x_0)$并且x从x_0变化到$(x_0+\delta x)$。

注意，一般上，$y=y_0+\delta y\neq(y)_1=y_0+(dy)_1$

3.定义:n阶绝对静止函数

如果y是x的一个函数表达式，并且存在至少一个$n\in Z^+$使到$f^{(r)}(x)=0$

对所有$x\in R$，和整数$r>n$。那么y是一个n阶绝对静止函数。

例如：如果$y=x^2$，那么$f^{(3)}(x)=0$ $\forall x\in R$，$\forall r>2$，

所以$y=x^2$是个2阶绝对静止函数或简称2次幂函数。

二、导论

1.导论1

假设$y=f(x)$，$f^{(n)}(x)\neq 0$且$f^{(r)}(x)=0$　$\forall r\geq n+1$和$r\in Z^+$

则$(dy)_n=\delta y$.

（y是个n阶绝对静止函数）。

例如：$y=x^3$，根据方程式A.1得

$$(dy)_3=3x^2(\delta x)+\frac{6x}{2!}(\delta x)^2+\frac{6}{3!}(\delta x)^3$$

$$\begin{aligned} &\text{当}\quad x=4,\quad \delta x= 0.1,\\ &\delta y=(4.1)^3-4^3=4.921\\ &(dy)_1=dy=3x^2(\delta x)=4.8\\ &(dy)_2=3x^2(\delta x)+3x(\delta x)^2=4.92\\ &(dy)_3=3x^2(\delta x)+3x(\delta x)^2+(\delta x)^3=4.921\end{aligned}$$

而且，$f^{(r)}(x)=0$　$\forall r\geq 4$和$(dy)_3=\delta y$（y是个3阶绝对静止函数）。

对某个$n\in Z^+$，当$(dy)_n=\delta y$时，则对所有δx的值都会成立。

例如：假设$y=x^3$，当$x=4$，$\delta x=7$时，

$\delta y=(4+7)^3-4^3=1267$

$(dy)_3=3x^2(\delta x)+3x(\delta x)^2+(\delta x)^3=3(4)^2(7)+3(4)(7)^2+(7)^3=1267=\delta y$

即$(dy)_3=\delta y$

2. 导论2

假设|δx|<1且对所有r∈Z$^+$和x∈R，$f^{(r)}(x)$存在，若是方程式A.1是个收敛数列，则，

$$\delta y = \sum_{r=1}^{\infty}[f^{(r)}(x)\frac{(\delta x)^r}{r!}]$$

作者发现并提出以上数列，为了证明dy/dx乃是一个比值。

很巧妙的是此数列，如同麦格劳林数列，皆是泰乐数列的特例。

三、应用领域

1. 求n阶准确度y=$f(x)$的变化量，$(dy)_n$和n阶准确度y值的估量，$(y)_n$

根据$(y)_n$=y_o+$(dy)_n$

例题：已知f(θ)=ℓn(cscθ+cotθ)和f(30°)=1.316957897，运用微分求：[f(31°)]$_1$，[f(31°)]$_2$和[f(31°)]$_3$诸值当θ从30°增至31°。

题解：令 $f(x) = \ell n(\csc x + \cot x)$，其中 x 的单位是弧度，则：

$f^{(1)}(x) = -\csc x$；$f^{(2)}(x) = \csc x \cot x$；$f^{(3)}(x) = -\csc^3 x - \cot^2 x \csc x$；
当 $x = \pi/6$ 时，

$[df(x)]_1 = f^{(1)}(x)\delta x = -\csc(\pi/6)(\pi/180) = -0.034906585$ （1 阶准确度）

$[df(x)]_2 = -0.034906585 + \csc(\pi/6)\cot(\pi/6)(\pi/180)^2/2! = -0.034378972$
$[df(x)]_3 = -0.034378972 - [\csc^3(\pi/6) + \cot^2(\pi/6)\csc(\pi/6)](\pi^3/180^3)/3!$
$= -0.034391377$ （3 阶准确度）

$[f(31°)]_1 = \ell n(\csc(30°) + \cot(30°)) - 0.034906585 = 1.282051312$（1 阶准确度）
$[f(31°)]_2 = \ell n(\csc(30°) + \cot(30°)) - 0.034378972 = 1.282578925$ （2 阶准确度）
$[f(31°)]_3 = \ell n(\csc(30°) + \cot(30°)) - 0.034391377 = 1.28256652$ （3 阶准确度）
注： $f(31°) = 1.282566819$ ……..

2. 求二度空间函数$f(x, y)$的变化量

若是$f(x, y)$在G区间可导，且其高阶偏微分对∀(x, y)∈G存在，当x和y的变化量各为δx和δy时，f值的第一阶，第二阶和第三阶的变化量，$(df)_n$是：

$$(df)_n = (df)_{n-1} + \sum_{r=0}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\frac{(\delta x)^{n-r}(\delta y)^r}{(n-r)!r!} \quad \forall n \geq 1 \text{ 且 } n \in \mathbf{Z}^+$$

$$(df)_1 = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y$$

$$(df)_2 = (df)_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{(\delta x)}{1!}\frac{(\delta y)}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{(\delta y)^2}{2!}$$

$$(df)_3 = (df)_2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\delta x)^3}{3!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\frac{(\delta x)^2}{2!}\frac{\delta y}{1!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\frac{(\delta x)}{1!}\frac{(\partial y)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{(\delta y)^3}{3!}$$

例题：$f(x, y)$=x^3+x^2y+xy^2+y^3 求$f(x, y)$的变化量当点P(1, 2)变至(2, 4)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 6y$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6$$

已知点P(1, 2)变至(2, 4)，

δf=f(2, 4) －f(1, 2)=105

$(df)_1$=(3+4+4)(1)+(1+4+12)(2)=45

$$(df)_2 = 45 + (6+4)\frac{1}{2!} + (2+4)\frac{1}{1!}\frac{2}{1!} + (2+12)\frac{(2)^2}{2!} = 90$$

$$(df)_3 = 90 + 6\frac{1}{3!} + 2\frac{(1)^2}{2!}\frac{2}{1!} + 2\frac{1}{1!}\frac{(2)^2}{2!} + 6\frac{(2)^3}{3!} = 105$$

此例之 $\delta f = (df)_3$。

3. 解偏微分方程式，求函数$f(x, y)$的值

根据作者提议$(df)_n$的定义：

$$(df)_n = (df)_{n-1} + \sum_{r=0}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\frac{(\delta x)^{n-r}(\delta y)^r}{(n-r)!r!} \quad \forall n \geq 1 \text{ 且 } n \in \mathbf{Z}^+$$

$$= (df)_{n-1} + \frac{1}{n!}[(\delta x)\frac{\partial}{\partial x} + (\delta y)\frac{\partial}{\partial y}]^n f \quad \forall n \geq 1 \text{ 且 } n \in \mathbf{Z}^+$$ **注：**$(df)_0 = 0$

以上数列也可以被利用来解偏微分方程式。

例题：已知$\frac{\partial f}{\partial x}$=2$xy$+1，$\frac{\partial f}{\partial y}$=$x^2$+3$y^2$+1和$f$(3, 5)=178，求$f$(10, 8)的值。

题解：已知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 + 1$

则得：$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$；$\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$；

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2$ 和 $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6$

因此，$(df)_1$=(2xy+1)δx+(x^2+3y^2+1)δy
=[2(3)(5)+1](7)+(9+75+1)(3)=472

$(df)_2$=$(df)_1$+(2y)(δx)^2/2+(2x)δxδy+6y(δy)^2/2!

=472+(2)(5)(49)/2+2(3)(7)(3)+6(5)(9)/2!=978

$(df)_3=(df)_2+2(\delta x)^2(\delta y)/2+6(\delta y)^3/3!$
=978+2(49)(3)/2+6(27)/3!=1152

$f(10,8)=f(3,5)+(df)_3$=178+1152=1330

正确答案是：$f(x,y)=x^2y+y^3+x+y$得$f(10,8)$=1330

4.解复数微分方程式

注意：以上方法也适用于复数域。

例题：解$\frac{df}{dz}=3z^2$ 已知$f(0)$=1+i.

题解：已知$\frac{df}{dz}=3z^2$，得$\frac{d^2f}{dz^2}=6z$和$\frac{d^3f}{dz^3}=6$

即然：$\frac{d^nf}{dz^n}=0\quad\forall n\geq 4$，

则：$\delta f=(df)_3=f^{(1)}\delta z+f^{(2)}(\delta z)^2/2!+f^{(3)}(\delta z)^3/3!$
$=(3z^2)\delta z+6z(\delta z)^2/2!+6(\delta z)^3/3!$

那么，$\delta z=2$，$f(2)=(1+i)+0+0+6(2^3)/6=9+i$，

$\delta z=3i$，$f(2+3i)=(9+i)+3(3)^2(3i)+6(3)(3i)^2/2!+6(3i)^3/3!=-45+10i$，

此微分方程式的正确答案是：$f(z)=z^3+1+i$.

当z=2+3i，$f(2+3i)=(2+3i)^3+1+i=-45+10i$.

5.求三度空间函数$f(x,y,z)$的变化量和解偏微分方程式，求函数$f(x,y,z)$的值

同理，若是$f(x,y,z)$在G区间可导，且其高阶偏微分对$\forall(x,y,z)\in G$存在，作者提议$(df)_n$的定义为：

$$(df)_n=(df)_{n-1}+\frac{1}{n!}\left[(\delta x)\frac{\partial}{\partial x}+(\delta y)\frac{\partial}{\partial y}+(\delta z)\frac{\partial}{\partial z}\right]^n f,\quad \forall n\geq 1 \text{ 且 } (df)_0=0$$

仿效3.2节和3.3节，可以求得函数$f(x,y,z)$的变化量和解偏微分方程式组，得函数$f(x,y,z)$的值。

例题：已知 $\frac{\partial f}{\partial x}=yz+y+z$; $\frac{\partial f}{\partial y}=xz+x+z$; $\frac{\partial f}{\partial z}=yx+y+x$ **和** $f(1,2,3)=17$ **求** $f(4,-1,2)$ **的值，**
即 $\delta x=3,\ \delta y=-3,\ \delta z=-1$

题解：已知 $\frac{\partial f}{\partial x}=yz+y+z$; $\frac{\partial f}{\partial y}=xz+x+z$; $\frac{\partial f}{\partial z}=yx+y+x$ 得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=z+1;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=x+1;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=y+1 \text{ 和 } \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=1$$

$$(df)_1=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=11(3)+9(-3)+5(-1)=7$$

$$(df)_2=7+\frac{1}{2!}\left[2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\delta x\delta y+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\delta y\delta z+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\delta x\delta z\right]=-32$$

$$(df)_3=-32+\frac{1}{6}\left[6\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}\delta x\,\delta y\,\delta z\right]=-23$$

$$f(4,-1,2)=f(1,2,3)+(df)_3=17-23=-6$$

正确答案是：$f(x,y,z)=xyz+xy+yz+zx$得$f(4,-1,2)=-6$

四、结论

在现实生活中，很多微分方程式只能用数理法求解。我在英国修读机械工程系博士学位时，论文牵涉到四组联立偏微分的求解，我当年是用$dy=y^{(1)}dx$的方法，名为欧拉法，误差极大，若是时间可以倒流，我的论文得重写。我女儿在新加坡国立大学修读机械工程系，她的毕业专题项目，牵涉到热力学，得解一组偏微分方程，我就建议用上法求解，能得到更加精准的答案，但不被采纳，她的教授却采纳我的另一个提议。所以，以上数理解偏微分方程式法，还没有被实际应用。

鄙人就想第一个介绍给中国宗祖国，推广应用。中国数学家林群院士强调学生得学好微积分，以上的微分多项式解联立偏微分方程法，可以加强学生对微积分的认识。新加坡的高中高级数学剑桥考纲包括欧拉法$dy=y^{(1)}dx$和欧拉改良法都不准确，希望有朝一日，此法能被纳入新加坡高中高级数学新加玻剑桥联合考纲。

参考文献

[1]魏金侠.Volterra积分微分方程数值解法的研究[D].燕山大学,2012.

[2]霍云娟.陈平瑛《中西算学题镜》研究[D].天津师范大学,2015.

[3]罗东升.几类微分耦合系统的时间最优控制[D].贵州大学,2020.