# 基于APOS理论之下的数学概念教学

## ——以“反函数”概念教学为例

方丽华
中国音乐学院附属中等音乐专科学校

**摘　要：**APOS理论是由杜宾斯基（Dubinsky）所提出，该理论清晰地指明了学生建构数学概念的学习层次，同时也为数学教师如何开展数学教学提供了一种具体的教学策略。本文以“反函数”为例来探讨了在数学概念教学中应用该理论的教学策略，并提出教学建议。

**关键词：**APOS理论；数学概念；反函数

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2022.02.044

一、问题的提出

数学概念是数学学科的知识体系基础，同时也是学生数学思维活动的核心，在数学的学习和教学中具有重要地位。我国的数学概念的教学多数采取“属+种差”的方式进行[1]，其基本操作过程如下：1.呈现概念；2.解析概念；3.应用概念；4.联系概念。利用呈现的概念解决问题，同时也建立了概念间的联系。这种教学形式简单明了，学生能够相对比较直接地学习概念。但这种教学方式是建立在一般的学习理论基础上的，偏重数学概念的逻辑结构，未能阐明数学概念对应的现实场景，学生对数学概念的形成发展过程没有充分的感受[2]。因此，数学概念教学应当映照现实，揭示数学概念的形成过程，使得学生从其现实情景、抽象过程和形式表达等方面去理解和学习数学概念。

杜宾斯基提出的APOS理论强调将数学概念融入现实背景当中[3]，学生通过数学活动亲自经历和感受数学与现实社会的联系，从中体会完整的数学学习过程，用数学的方式组织和建立数学概念[4]。因此，本文以APOS理论为基础来探讨高中反函数的概念教学。

二、建构APOS理论

A，P，O，S分别指的是Action（活动）、Process（程序）、Object（对象）以及Scheme（图式）[5]。在这一过程中，学生需要在自身已有的知识经验基础上，主动建立新知识的概念，才能做到理解问题的本质[6]。

APOS理论包含四个基本成分：

首先是“活动”。“活动”是指个体通过外显性的指令去变换为客观的对象[1]。活动是为了更好的理解知识。个体感知到对象，其实质上是一种外部刺激，再把感知到的对象进行转换，形成操作。例如：理解函数概念需要进行活动或者操作，以“路程和速度”为载体，通过具体实例，建立路程与速度的关系，通过这种操作，学生获得函数的活动意义。经过多次的重复，便可内化成心理操作，可称为“程序”。有　“程序”后，个体便可以想象该“活动”了；进而，他还可以对此程序逆转以及与其他程序组合。例如：学生一旦认识到，函数是给定不同的数，就会得到对应的不同值而不需再进行具体运算时，学生便完成了程序模式的建构。

当个体可以把“程序”作为一个整体进行操作时，这一程序便变成了一种心理“对象”。例如，$y=x^2$。当将注意力从相应的计算具体函数值的过程转移到函数本身时，就可以把函数看作一个单一的对象，把函数作为独立对象。这样，不但可以讨论函数的各类性质，还可以以此为对象进行各类函数运算。

最后便是“图式”。一个数学概念的“图式”是指由相应的“活动”“程序”“对象”及与某些一般原理有联系的其他“图式”所构成的个体头脑中的一种认知框架，可以解决与此概念相关的问题。

可以看出，APOS理论的层次划分方法是合理的，它反映出学生数学概念学习过程中真实的思维活动。

三、基于APOS理论的教学过程设计

1.根据APOS理论设计反函数概念教学（2课时）

（1）活动阶段——感受概念的直观背景，形成感性认识

创设问题情境：物体做匀速直线运动的位移s是时间t的函数，即s=vt。

其中，速度v是常量。如已知位移，能否求出物体运动的时间呢？如何表示？

问：能否把时间t看成是位移s的函数？为什么？

（2）过程阶段——体验概念的形成过程

分析：图2中，对于集合B中的任何一个元素s，按照对应法则（$\times\frac{1}{v}$），在集合A中都存在唯一的元素t与之对应，符合函数的定义，$t=\frac{s}{v}$表示一个函数。

问：观察以下的两个图，有何异同点？（让学生主动思考）

预设：函数s=vt是集合A到集合B的映射，函数$t=\frac{s}{v}$是集合B到集合A的映射，而且对应法则可逆。我们称函数$t=\frac{s}{v}$是函数s=v t的反函数。

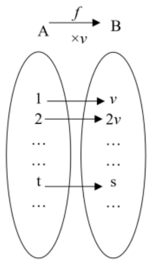


图 1：$s=vt$

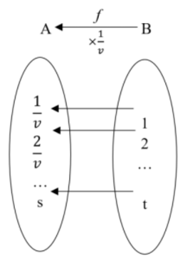


图 2：$t=\frac{s}{v}$

能否用类似的方法（如下图），更一般地给出函数$y=f(x)$得出其反函数？

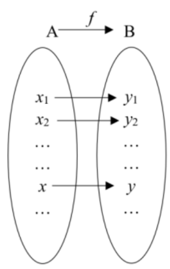


图 3

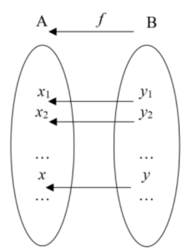


图 4

引导学生从映射的角度分析，映射可以是一对一，也可以是一对多，当映射是一对多时，从B到A的对应就是多对一，此时不是映射。因而，只有当函数是从定义域到值域的一一映射才能有反函数。

问：请同学描述反函数的定义（体现思维的灵活性，考察学生用语言描述概念，是否抓住概念本质）

问：函数$y=f(x)$与反函数$x=f^{-1}(y)$的图像有什么关系呢？

看这个例子：函数$y=2x$（$x\geqslant0$）与其反函数$x=\frac{y}{2}$图像如下图所示：

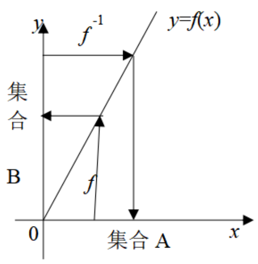


图 5

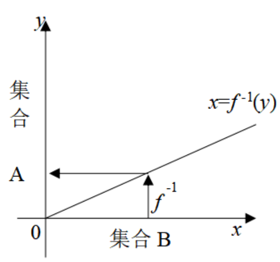


图 6

分析：如图5，在同一坐标系中，函数$y=2x$（$x\geqslant0$）与其反函数$x=\frac{y}{2}$图像完全一致，实质上表示的是同一种关系，只是$x$、$y$的地位不同，不记住是从$x$到$y$还是$y$到$x$，就分不清楚函数的图像与其反函数的图像。为此：按照习惯$x$是自变量，$y$表示函数，把$x=f^{-1}(y)$中字母$x$，$y$对调一下，从而把反函数$x=f^{-1}(y)$表示成$y=f^{-1}(x)$，相应的集合位置也对调了，如图6。

问：函数$y=f(x)$和函数$x=f^{-1}(y)$，函数$x=f^{-1}(y)$和函数$y=f^{-1}(x)$的关系如何？

函数$y=f(x)$与函数$x=f^{-1}(y)$表示的是不同的函数，函数的定义域、值域、对应法则均不同，但从方程观点看是表示同二元一次方程，所以，在图像上是一致的。函数$x=f^{-1}(y)$与函数$y=f^{-1}(x)$表示同一个函数，函数$x=f^{-1}(y)$表示从集合B到集合A的映射，$y=f^{-1}(x)$也表示从集合B到集合A的映射，而且对应法则相同，所以，表示同一函数。

一般地，函数$y=f(x)$的反函数经过改写的形式表示，即$y=f(x)$（$x\in$A）的反函数为$y=f^{-1}(x)$（$x\in$B）。

（3）对象阶段——揭示概念的本质属性

问：原函数$y=f(x)$和函数$y=f^{-1}(x)$是什么关系？

首先，函数$y=f(x)$和函数$y=f^{-1}(x)$互为反函数；

如果函数$x=f^{-1}(y)$有反函数$y=f^{-1}(x)$，那么，函数$y=f^{-1}(x)$反函数就是$y=f(x)$。即函数$y=f(x)$与函数$y=f^{-1}(x)$互为反函数。

其次，“三定”，反函数的三要素有原函数来决定；

由映射概念知，函数$y=f(x)$是集合A到值域集合B的映射，而它的反函数$y=f^{-1}(x)$是集合B到集合A的映射。所以，原函数的定义域A是反函数的值域，原函数的值域B是反函数的定义域，而且它们的对应法则互逆。

再者，“三反”；

| | 函数$y=f(x)$ | 反函数$y=f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|
| 定义域 | A | B |
| 值域 | B | A |
| 对应法则 | $f$：A→B | $f^{-1}$：A←B |

问：如何求反函数呢？

例：求函数$y=\sqrt{x}+1$（$x\geqslant0$）的反函数。

解：由函数$y=\sqrt{x}+1$，解得：$x=(y^{-1})^2$。互换$x$，$y$，得$y=(x^{-1})^2$。所以，函数$y=\sqrt{x}+1$（$x\geqslant0$）的反函数$y=(x^{-1})^2$。

问：上面的解法正确吗？为什么？（培养学生思维的批判性）

分析：如果上面解法正确，则由原函数与反函数互为反函数可知，函数$y=(x^{-1})^2$的反函数为$y=\sqrt{x}+1$（$x\geqslant0$），而实际上，不是一一映射，所以函数$y=(x^{-1})^2$不具有反函数。可见，上面解法是错误的。

问：如何纠正呢？

预设：限制定义域。

问：能否从求出的反函数表达式加以限制呢？

预设：不行。先求出原函数的值域$\{y|y\geq 1\}$，得出反函数的定义域$\{x|x\geq 1\}$。所以，原函数的反函数为$y=(x^{-1})^2$（$x\geqslant 1$）。

求反函数必须明确指出其定义域，以保证结论的正确性。

巩固练习：求$y=x^2+4x+5$（$x\leqslant -2$）的反函数。

思考：①若函数$y=f(x)$（$x\in A$，$y\in B$）存在反函数，且在定义域A上单调递增，那么其反函数的单调性如何？

②若函数$y=f(x)$（$x\in A$，$y\in B$）存在反函数，且为奇函数，那么其反函数的单调性如何？

分析：①从函数单调性定义可以证明其反函数在B上也单调递增，若原函数递减，则反函数也单调递减。

②从一一映射角度分析：原函数为奇函数，则$x\to y$，$-x\to -y$，对于其反函数$y\to x$，$-y\to -x$，所以，$f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$，即反函数也是奇函数。

问：偶函数是否具这一性质？

预设：没有（学生根据上述分析，容易得出偶函数不具有反函数）。

（4）图式阶段——形成综合的心理图式，并加以应用

通过对反函数概念形成过程的反思，对比函数的性质，得出反函数的性质：

① $f^{-1}[f(x)]=x$（$x\in A$），$f[f^{-1}(x)]=x$（$x\in B$）；

②原函数与反函数图像关于$y=x$对称；

③原函数与反函数的单调性一致；

④如原函数为奇函数，则其反函数同样为奇函数。

对反函数概念的深化，通过以下例题，使学生对反函数的概念和性质能灵活地应用，从而培养学生思维的深刻性和灵活性。

例1：若$f(x)=3x^2+2$（$x\geqslant 0$），则$f^{-1}[f(2)]=$____。

例2：若函数$f(x)=\sqrt{x}+1$，则$f^{-1}(3)=$___。

例3：已知函数$y=2x+b$与$y=ax+3$互为反函数，求常数a，b。

例4：已知点（1，2）在函数$f(x)=\sqrt{ax+b}$的图像上，又在其反函数$f^{-1}(x)$的图像上，其函数$f(x)$的解析式。

2.APOS理论的教学分析

位移与时间的模型是学生很熟悉的问题背景，它的引入体现了APOS理论活动阶段中将数学概念寓于实际背景中。

从活动到程序阶段中，通过情境的创设，从具体到抽象，从实例上升为数量分析，学生初步体会反函数，调动其学习知识的欲望，提高对数学的敏锐度。

从程序到对象的阶段强调对反函数定义的认识和理解，重视从映射角度、函数三要素分析原函数与反函数的关系，指出反函数概念的本质，加深对反函数概念的理解并探究原函数与反函数图像的关系。这样，学生能够整体全面地把握反函数。

学习了反函数的定义和图像，进一步地探索反函数的性质，加深对反函数的认识和理解从而解决新的问题，例题的设计可以更好地培养学生学习能力完成学生对知识的主动建构，同时可以使新知识融入原有的知识体系里，这是APOS理论的图式阶段。

本教学按照创设教学情境→体会原函数与反函数关系→尝试抽象概括→提升应用能力这一程序循序渐进，以思维逐步深化为主线贯穿始终。通过对反函数概念的研究，提升学生的逻辑推理能力和抽象概括能力。

## 四、讨论与建议

在整个环节中，相应的操作为图式的形成提供了必要的基础。从这样的角度分析，“孰能生巧”这一中国数学学习方法有一定的合理性。APOS具有广泛的应用，如函数概念、微积分问题、统计问题等。但是，APOS理论对于数学概念的学习的指导作用还要与教师实践水平有关。为了推动该方法的应用，提出以下建议。

1.创设恰当的现实情境

创设现实情境让学生亲身体验和感受，让学生积极思考并从现实情境中发现数学。情境的创设要注意，应适合学生的发展水平。考虑提升趣味性，并需注意，教学不能只在Action层次，不宜花大量时间和精力。

2.数学概念的建立要多次反复

教师需要意识到一个数学概念的建立需经过从“过程”到“对象”的压缩、抽象、循序渐进、直到学生理解的多次重复的过程。教师在教学中要注重知识间的联系和应用，帮助学生建立完整的数学知识的心理图式。

**参考文献**

[1]鲍建生，周超.《数学学习的心理基础与过程》[M].上海：上海教育出版社，2009.

[2]陈建国.如何实施初中数学概念有效教学——APOS理论在初中数学概念教学中的应用[J].科技资讯.2009.

[3]曹丽娟.基于APOS理论下的高中函数概念教学方式探究[D].陕西师范大学硕士论文.2012.

[4]郑秀云.APOS理论指导下的高中数学概念教学[D].福建师范大学硕士论文.2003.

[5]张奠宙，李士琦，李俊.数学教育学导论[M].北京：高等教育出版社.2004.

[6]乔连全.APOS：一种建构主义数学学习理论[J].全球教育展望.2001.