

借助整体思想巧妙解答初中数学难题

罗中兵

云南省普洱市景东县银生中学

摘要:整体思想是初中数学中的一个重要概念,它在初中、高中数学的各个环节都有体现。使学生能较容易地解决较复杂的问题。在新课改的背景下,中学数学教学要重视对学生进行数学思维的深入渗透。在初中数学解题中,整体思想是一种被广泛使用的数学思想,它在中考中经常被考查。文章以自己的教学实践为基础,将整体思想运用到代入求值、几何等练习中。运用整体的思维,将题目的内容理解透彻,巧妙地将已知的条件进行转化,从而使学生在解决问题的过程中,更加得心应手。

关键词:初中数学;整体思想;解决问题

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2022.07.036

整体思想就是对问题进行全面的理解,对问题进行思考,注重对问题的整体结构和特点进行分析,实现由复杂到简单,从困难到容易的目标。有些数学难题,若按常规方法求解或繁或不可能,然而若转换思维,在考虑问题时,将注意力和着眼点放在问题整体上,把一些彼此独立,但实质又紧密联系着的量作为整体来处理,则可化繁为简、变难为易。整体思想可以让学生走出“只见树木,不见森林”的误区,培养学生的全局观意识^[1]。对于一些复杂的问题常常需要解决一些未知数的方程或不等式,这些方程或不等式通常是由一些部分组成,而这些部分之间又存在着相互制约和依赖的关系,有的时候很难去解其中的部分未知数,由此,在不断的尝试过程中,把有着相互制约和依赖关系的未知数作为一个整体思考的思维模式应运而生。教师要注意随时注意学生的学习体验,在教学过程中,要指导学生阅读问题,把重点圈出来,把整体概念贯穿于题中,并对其进行指导和强调,培养学生运用整体思维解决问题的能力。整体性的思想体现在整体思维、整体运算、整体置换或整体构建等方面,其适用范围广泛,如方程和不等式,函数和图像,几何和图形等^[2]。下面,作者以若干经典实例,着重论述了“整体性”思想在初中教育阶段中的应用。

一、整体思想在初中数学中的重要性

初中数学是高中数学、物理、化学等学科的基础,所以学好初中数学是以后学习的铺垫,我们不仅仅要应试,还要从中来体会数学思想的奥妙。中考常用到的数学思想方法有:整体思想、转化思想、函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想等。在复习时要注意体会教材例题、习题以及中考试题中所体现的数学思想和方法,培养用数学思想方法解决问题的意识。其中整体思想为必考内容。

1. 有助于学生建立数学思维

整体思想是一种重要的数学思维方式,该思维要求学生解决问题时,不仅要关注局部细节,更要从整体上把握问题的结构和性质。这种思维方式有助于学生在面对复杂的数学问题时,能够迅速地识别出问题的核

心和关键点,从而找到解决问题的有效途径。通过培养整体思想,学生可以逐渐形成一种宏观、全局的数学视角,这对于他们在未来的学习和工作中解决各种问题都具有重要的意义。

2. 有助于学生提高解题效率

整体思想能够帮助学生更好地理解题目的要求,从而更快地找到解题的方法和步骤。当学生能够从整体上把握问题时,他们就能够更加清晰地看到问题的本质和目标,从而更加有针对性地寻找解决方案。此外,整体思想还有助于学生在解题过程中避免陷入细节的泥潭,从而节省时间和精力,提高解题的效率。

3. 有助于学生培养抽象思维

整体思想要求学生从宏观的角度去看待问题,这就需要学生具备一定的抽象思维能力。抽象思维能力是指从具体的实例中抽取出共性和规律的能力,它是学习高级数学的重要基础。通过培养整体思想,学生可以逐渐学会从具体的问题中抽象出一般性的规律和方法,从而更好地理解和掌握数学知识^[3]。

4. 有助于学生增强逻辑能力

整体思想需要学生在思考问题时,能够理清各个部分之间的关系,这就需要强大的逻辑推理能力。逻辑推理能力是数学的核心能力之一,它是指根据已知条件和规则推导出正确结论的能力。通过培养整体思想,学生可以锻炼自己的逻辑思维能力,从而更好地进行推理和证明。

二、整体思想方法应用主要归纳

整体思想是数学思想方法中最重要的思维方法之一,这种思想贯穿整个学科,体现了一种着眼全局、通盘考虑的整体观念。整体思想在整式、分式、二次根式、解方程(组)、函数甚至几何运算中都有所体现,是一种非常重要和普遍的思维方法,因此在中考中具有举足轻重的地位。在使用整体思想解题时,一定要善于把握求值或求解的问题的内在结构、数与形之间的内在结构,要能敏锐地洞察问题的本质,有时也不要放弃直觉的作用。

1. 整体求和

用整体求和思想,要善于考察题设与结论的整体结构和特征(包括数字特征、已知代数式的特征、问题的结构特征、求值式的特征)从整体上进行求和运算,可摆脱枝节的束缚。常用于解答下列问题:实数的运算、代数式求值、大小估计,一元二次方程根的对称式和非对称式的求值、数字问题等。

2. 整体代入

在解决代数求值问题时,经常会遇到一些复杂的表达式或者繁琐的计算过程。为了简化这些问题,一个有效的策略是将已知条件进行适当的变形,或者将某些关系式视为一个整体,直接代入到求值式中,化整为零,整体突破整体求积。这种方法可以帮助我们将一个大问题分解为几个小问题,从而实现整体突破和快速求解。例如,假设我们有一个包含多个变量的复杂代数式,而这些变量之间存在某些已知的关系。如果我们能够识别出这些关系,并将它们作为一个整体来处理,那么我们可以避免对每个变量单独进行计算,而是将它们的关系直接代入到求值式中。这样做不仅减少了计算量,而且有助于避免在单独处理每个变量时可能出现的错误^[4]。

3. 整体换元

整体换元思想是指将题目中的条并用一件或结论看作一个整体,个新量去替代,使问题转化为对这个新量的研究,能起到化繁为简、化难为易的作用。用整体换元思想可解答下列问题:因式分解、解分式方程、解无理方程、解高次方程。

4. 整体变形

在运用整体变形思想时,要弄清变形的目的、变形的方向、变形的过程以及变形的结果有什么作用,才能确定如何变形,怎样变形。整体变形的方法有:整体配方、整体求倒、整体相加、整体相乘、整体相减和整体构造等。

5. 整体构造

用整体构造思想时,关键有两点:第一,必须弄清条件的本质特点以便明确构造什么,如何构造;第二,要有明确的方向,即为什么构造。常用的构造方法有:构造代数式知识,构造多项式、构造对偶式、构造有理化因式、构造递推式、构造方程、不等式等;构造几何知识有构造三角形、构造正方形、构造圆、构造正多边形和构造对称图形等。

6. 整体设元

可以把所求的值或代并设其等于一个数式作为整体,或几个未知数进而建立方程或方程组的思想叫整体设元思想。可解决以下问题:整数问题、求值问题、证明问题、其他问题。

三、整体思想的具体应用

1. 平方差中的整体思想

做平方差相关题目的前提,需要学生熟记平方差公式。平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,这个公式中,“a”“b”都是字母,所以“a”“b”可以是单项式也可以是多项式。学生在刚接触平方差的题目时,难以转

换思想,这时候整体思想在其中的应用就尤其重要。

例1:平方差 $(a+b-c)(a+b+c)$ 中,结果应该是 $(a+b)^2-c^2$ 。

具体做法如下:(1)教师引导学生找前后两个括号里符号没有发生变化的项和符号发生改变的项。

$(a+b-c)(a+b+c)$ 红色为前后括号符号没有发生改变,蓝色的项前后括号发生了改变。

(2)符号没变的写一起为: $a+b$,符号改变的写一起为: c ,

(3)然后用符号没变的项的平方 $(a+b)^2$ 减去符号改变的项的平方 c^2 ,该段话教师要注意引导学生学会理解变项和不变项,这也是解决平方差问题的关键点。

例2: $(a-b+c)(a+b+c)$

(1)找项(让找出前后括号中符号发生改变的项和符号没有发生改变的项)即: $(a-b+c)(a+b+c)$;

(2)移项 $(a+c-b)(a+c+b)$;

(3)公式套用,写出平方差 $(a+c)^2-b^2$ 。

例:3 $(a-b+c+d)(a+b+c-d)$ 结果如何呢?

解: $(a-b+c+d)(a+b+c-d) \rightarrow (a+c-b+d)(a+c+b-d) \rightarrow (a+c)^2-(b-d)^2$

接下来教师引导学生利用上述的整体思想完成平方差逆运用题目。

例1:(1) $(x+y)^2-(x-y)^2$

分析: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

解= $((x+y)+(x-y))((x+y)-(x-y))$
= $(2x \cdot 2y)=4xy$

例2:其他变形题。

$(a+b)^2(a-b)^2$

分析:积的乘方=乘方的积 $x^2y^2=(xy)^2$

解= $((a+b)(a-b))^2$

= $(a^2-b^2)^2$

= $a^4-2a^2b^2+b^4$

2. 方程问题中的整体思想

中学数学中的一些方程问题、不等式问题是一类非常复杂的问题,往往让学生感到无从下手。所以,教师可以根据试题的结构特征,指导学生运用整体的思维方式,来理清问题的解决方式,从而使学生的解题过程变得更加的简单,并且还能起到加强学生数学思维的作用^[5]。

例:在实数范围内解方程: $2y^2+3y-4=\frac{5}{2y^2+3y}$

分析:很多学生在解决这类方程的时候,都会采用传统的方法,先去分母,然后再求解。这种解法最高次数会出现4次,所以,解决起来非常困难。在这种情况下可以采用整体的思路来解决这个问题,通过观察方程,用整体换元的方法,把分数型方程变成整数型方程来解决。

解:设 $z=2y^2+3y$,

\therefore 方程 $2y^2+3y-4=\frac{5}{2y^2+3y}$ 可以转化为 $z-4=\frac{5}{z}$,即 z^2-

$4z-5=0$, 解得 $z=-1$ 或者 $z=5$, 当 $z=5$ 时, $2y^2+3y=5$, 解得 $y_1=-\frac{5}{2}$, $y_2=1$; 当 $z=-1$ 时, $2y^2+3y=-1$, 解得 $y_3=-1$, $y_4=-\frac{1}{2}$ 。

2. 整体思想在图形面积中的应用

例: 由下图1例题图可知, $\angle C=90^\circ$, $AC=4$, $BC=2$, 分别以 AC 和 BC 为直径, 绘制半圆, 求出图中阴影区域的面积。(保留 π 的结果)

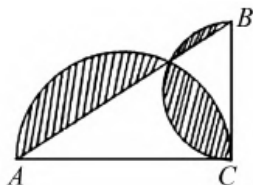


图1 例题图

在解决涉及阴影面积的几何问题时, 如果阴影部分是由不规则图形组成的, 直接计算每个阴影部分的面积会非常困难。这是因为不规则图形往往没有直接的面积公式可供使用, 或者即使有, 也可能因为图形的复杂性而难以应用。在这种情况下, 采取常规的解题方法, 即先分别计算各个阴影部分的面积然后求和, 对于学生来说会遇到很大的挑战。为了克服这个难题, 教师可以引导学生采用差值方式, 这是一种间接计算面积的方法。具体来说, 可以先计算出包含阴影部分的整体图形的面积, 然后减去未被阴影覆盖的部分的面积。这样, 就能够得到阴影部分的总面积, 而无需直接计算每个不规则阴影图形的面积。这种方法的关键在于识别出整体图形和未被阴影覆盖的部分, 然后利用这些部分的标准图形面积公式进行计算。通过这种方式, 可以将一个复杂的问题转化为几个简单的问题, 从而简化解题过程^[6]。

解 设各个部分的面积为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 、 S_5 , 具体如下图2所示。

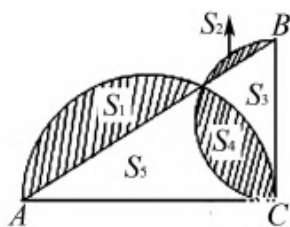


图2 分析图

∵两个半圆的面积为 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_4$, $\triangle ABC$ 的面积是 $S_3+S_4+S_5$, 阴影部分的面积是 $S_1+S_2+S_4$,

∴图中阴影部分的面积是两个半圆的面积减去三角形的面积, 即

$$S_{\text{阴影}}=S_1+S_2+S_4$$

$$S_{\text{阴影}}=\frac{1}{2} \times \pi \times 4 + \frac{1}{2} \times \pi \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2$$

$$=\frac{5}{2} \pi - 4$$

3. 整体思想在数与式中的应用

例: 已知 $x^2-3x-6=0$, 求 $2x^2-6x+1$ 的值。分析: 本题若用常规思路解决问题, 我们需要先根据 $x^2-3x-6=0$ 求出具体 x 的值, 再将 x 的值代入到方程 $2x^2-6x+1$ 中求解。但是, 经观察求值式子可以发现 $x^2-3x-6=0$ 无法轻易因式分解, 那么求未知数 x 的值就有一定的计算难度, 需要借助一元二次方程的求根公式。很显然解题的过程变得较为繁琐, 伴随着求根公式的引入, 计算的难度有所增加, 错误率也易增加。然而如果从式子的整体入手, 认真观察式子的整体结构特征, 就能够发现 x^2-3x 恰好是 $2x^2-6x$ 的一半, 即 $2x^2-6x+1=2(x^2-3x)+1$, 那么, 可由 $x^2-3x-6=0$ 变形得 $x^2-3x=6$, 再将其整体代入到式子 $2(x^2-3x)+1$ 中, 问题就迎刃而解了。

从上述代数式求值问题中, 不难发现某些代数求值问题若拘泥于常规解法, 则很难得到突破, 易形成举步维艰的局势。但整体思想的运用, 可以帮助学生快速且准确地找寻到问题突破的关键, 让问题的解决变得更加简单明了^[7]。

四、结语

综上所述, 整体思想在数学中应用非常广泛, 可以应用于各种数学问题, 包括代数、几何、概率统计等方面。整体思想的运用能够使学生在解决数学复杂问题时, 避免陷入局部细节的泥潭, 从而快速且准确地找到问题的关键所在。它不仅提高了解题的效率, 也增强了学生对数学问题的洞察力和解决能力。通过培养和运用整体思想, 可以将复杂的数学问题转化为简单明了的结构, 让问题的解决变得更加直接和高效。并且通过分析解题思路, 演示解题过程, 加深学生对整体思维的重要性的理解, 开阔他们的眼界, 让他们能够掌握利用整体思维来解决各种问题的要点和细节, 从而有效地提高学生的解题能力。所以, 在教学过程中, 要根据实际情况, 有针对性地进行学习, 从而提高初中数学课堂的教学效率。

参考文献

[1]董美程.巧借数学思想提升初中生解题能力[J].理科爱好者(教育教学),2022,(02):105-107.
 [2]贾应龙.整体思想在解决初中数学一元二次方程中的应用[J].数学学习与研究,2021,(10):36-37.
 [3]周咏梅.聚焦初中数学中三种常用的数学思想[J].语数外学习(初中版),2021,(02):32-33.
 [4]沈小军.整体思想在初中数学解题中的妙用[J].语数外学习(初中版),2020,(12):19-20.
 [5]卢理芳.试论整体思想在“解一次方程组”中的运用[J].教育界,2020,(36):59-60.
 [6]程小芹.整体思想在初中数学解题中的应用[J].语数外学习(初中版),2020,(04):28-29.
 [7]姜华文.浅谈整体思想在初中数学解题中的应用[J].数学教学通讯,2020,(11):63-64.