一个定积分估值的多种方法

董艳青

郑州职业技术学院 通识教育学院

摘　要：本文以定积分$\int_0^1 e^{x^2}dx$为例，对于没有初等形式原函数的被积函数，在计算此定积分的估计值时，给出了估计此定积分值的多种方法，以供读者借鉴。

关键词：定积分；原函数；估值

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2023.01.110

引言

对于定积分的计算，主要是应用牛顿—莱布尼茨公式，但并不是所有的可积函数都存在初等形式的原函数，或者有些被积函数的原函数虽然存在，但是很难表达出来，此时，我们用牛顿—莱布尼茨公式求此定积分不可行或很难进行。本文以“估计定积分$\int_0^1 e^{x^2}dx$的值”为例，因为被积函数e^{x^2}没有初等形式的原函数，故不能用牛顿—莱布尼茨公式求此定积分，但可以计算此定积分的估计值，并给出了估计此定积分值的多种方法。

一、直接用定积分的性质

估值定理[1]：若M和m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值，则有$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$，这是我们常用的一种估值方法。

解　由于e^{x^2}在$[0,1]$上单调递增，故$1\le e^{x^2}\le e$，即$m=1,M=e$，所以$1\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e$.

二、用Hadamard不等式来估值

Hadamard不等式[2]：若$f(x)$是区间$[a,b]$上的下凸函数，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

当且仅当$f(x)$是线性函数时，等号成立。另外，若$f(x)$是区间$[a,b]$上的上凸函数，则上述不等式的不等号反向。

解　由于$\left(e^{x^2}\right)''=e^{x^2}\left(2+4x^2\right)>0$，故函数$e^{x^2}$为$[0,1]$上的下凸函数，则有

$$e^{\frac{1}{4}}\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le\frac{1+e}{2}.$$

注：明显利用Hadamard不等式进行估值的结果更精细些。

三、利用Darbour和估计积分值

要点：若$s=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i, S=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$表示积分$I=\int_a^b f(x)dx$的下、上Darbour和，那么积分存在时，有估计$s\le\int_a^b f(x)dx\le S$.

解　将区间$[0,1]$分成n等分，利用e^{x^2}的单

调性，对每个小区间在端点处到达上、下确界。

因此 $s=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}$，

$S=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}$，此时 $S-s=\frac{1}{n}(e-1)$

，利用Darbour和估计定积分值随着 n 取值的增大而更加精细：

当 $n=1$ 时，有 $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$，当 $n=2$ 时，

有，$\frac{1+e^{\frac{1}{4}}}{2} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \frac{e^{\frac{1}{4}}+e}{2}$，

当 $n=3$ 时，有 $\frac{1+e^{\frac{1}{9}}+e^{\frac{4}{9}}}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \frac{e^{\frac{1}{9}}+e^{\frac{4}{9}}+e}{3}$，……

四、积分梯形公式法

定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f_+^{(n+1)}(a)$ 存在，且

$f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0, f_+^{(n+1)}(a) \neq 0$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，且对于这里的 ξ 有

$$\lim_{b \to a^+} \frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

积分梯形公式[4]：设定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 中的被函数满足上述定理的条件，对 $[a,b]$ 作 m 等分的分割：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b, \Delta x=\frac{b-a}{m}$，则根据计算曲边梯形面积的三步曲—分割、近似、求和，得定积分的近似公式为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{m} f\left(x_{i-1}+\frac{\Delta x}{\sqrt[n]{n+1}}\right) \frac{b-a}{m}+$$

$$\sum_{i=1}^{m} f'\left(x_{i-1}+\frac{\Delta x}{\sqrt[n]{n+1}}\right) \frac{\sqrt[n]{n+1}-2}{2\sqrt[n]{n+1}}\left(\frac{b-a}{m}\right)^2.$$

特别地，当 $n=1$ 时，上式变为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{m} f\left(x_{i-1}+\frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x=\sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \frac{b-a}{m}$$

解取 $m=5$，因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以有 $f(x)=e^{x^2} f'(0)=0, f''(0) \neq 0$，故可由积分梯形公式计算其近似值，

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
e^{x^2}	1.0101	1.0942	1.2840	1.6323	2.2479

代入梯形积分公式，有

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{5}(1.0101+1.0942+1.2840+$$

$$1.6323+2.2479)=1.4537.$$

注：随着分割的越细，近似程度会越好。

五、蒙特卡罗积分的平均值法

平均值法[5]：设 $g(x)$ 是某随机变量 X 的密度函数，且 $\int_a^b g(x) dx=1$，则积分 I 可变形为

$$I=\int_a^b f(x) dx=\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx=E\left[\frac{f(X)}{g(X)}\right],$$

这样定积分 I 就表示随机变量函数 $Z=\frac{f(X)}{g(X)}$ 的数学期望。

设 $X \sim U(0,1)$，则有 $I=\int_0^1 e^{x^2}dx=E\left[f(X)\right]$，这样定积分 $I=\int_0^1 e^{x^2}dx$ 表示随机变量函数 $f(X)$ 的数学期望。设 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 为从 $U(0,1)$ 抽取的均匀随机数，由大数定律知，当 $N\to\infty$ 时，$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)\xrightarrow{P}E(f(X))$，则 I 的估计值为

$\hat{I}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)$，由

$$E(\hat{I})=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)\right]=E(f(X))=I$$

知 $\hat{I}$ 为 I 的无偏估计量。

解 用平均值法估计定积分，需要借助R4.1.0软件模拟，样本数 $n=1000$，程序如下：

```
n=1000
x=runif（n，0，1）
f=function（x）exp（x^2）
I=mean（f（x））；I
```

由于随机数的随机性，对于固定的 n 值，每次试验结果都会有所不同，且随 n 取值的不同，积分的估计值不同，相对误差也不同。本例对同一个 n 值计算五次，取五次结果的平均值作为最终的积分估计值，并根据最终积分估计值计算出相对误差，具体如下表：

样本数 n	10^3	10^4	10^5	10^6
结果1	1.444984	1.457646	1.459424	1.462725
结果2	1.468471	1.463916	1.463422	1.463066
结果3	1.458744	1.460492	1.462084	1.46311
结果4	1.450641	1.470554	1.461487	1.462062
结果5	1.496172	1.464001	1.465459	1.462121
积分估计值	1.4638024	1.4633218	1.4623752	1.4626168
相对误差	0.078652%	0.045794%	0.018925%	0.002407%

注：1、表中 $相对误差=\left|\frac{估计值-精确值}{精确值}\right|$.

2、表中的积分精确值是应用integrate（f，lower=0，upper=1）计算的七位有效数字的近似值1.462652.

3、由表中数据可见，样本数 n 越大，计算精度越高.

参考文献

[1]程敬松，刘凤敏.高等数学（少学时）[M].大连理工大学出版社，2022.8.

[2]冯慈璜.关于凸函数的Hadamard不等式[J].数学年刊A辑（中文版），1985（04）：443-446.

[3]裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].高等教育出版社，2006.4.

[4]陈新一，唐文玲.定积分的一个估计式[J].甘肃联合大学学报（自然科学版），2004（04）：11-14.

[5]张艳.利用蒙特卡罗方法求解数值积分[J].高等数学研究，2023，26（01）：44-46+61.

作者简介：董艳青（1990-），女，汉，河南洛阳人，硕士研究生，研究方向：高等数学教学。