

高中数学数列中的解题方法

薄金龙

新泰市第二中学

摘要: 数列内容是高中数学的重要一部分, 在高考试题中是六个大题之一, 还在选择、填空题中有一道或两道小题。并且数列为单独一章的内容, 规律性很强, 重点题型是求通项公式和求和, 数学方法很多。因此很有必要归纳总结一下。

关键词: 高中数学; 数列; 解题方法

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2023.05.009

一、求数列的通项公式的方法

(一) 已知前 n 项和 S_n 求通项公式 a_n

例1. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^{n+1} - 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 。

解: 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2^{1+1} - 1 = 3$ 。当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = 2^n$,

经检验不适合 $n=1$ 的情形。故 $a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ 2^n, n \geq 2 \end{cases}$ 。

点评: 已知前 n 项和 S_n 求通项公式 a_n 的可能结果有两种, 若当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 适合 $n=1$ 的情形, 则最后结果为 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \in N^*)$; 若不适合, 则最后结果为

$$a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

(二) 公式法

例2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 2$, 求 a_n 。

解: $\because a_{n+1} - a_n = 2, \therefore \{a_n\}$ 为公差为2的等差数列, $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$ 。

(三) 累加(乘)法

累加法是求型如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 的递推数列通项公式的基本方法(其中数列 $\{f(n)\}$ 可求前 n 项和)。

例3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n, n \in N^*$, 求通项公式 a_n 。

解: $\because a_{n+1} = a_n + 2n, \therefore a_{n+1} - a_n = 2n,$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= 2 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1) = 2 + \frac{(n-1)(2+2n-2)}{2} \\ &= n^2 - n + 2. \end{aligned}$$

累乘法是求型如 $a_{n+1} = g(n)a_n$ 的递推数列通项公式的基本方法(数列 $\{g(n)\}$ 可求前 n 项积)。

例4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1}$,

其中 $n \in N^*$, 求通项公式 a_n 。

解: 由已知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$,

$$\therefore a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

(四) 待定系数法

常用的有以下几种:

1. 若递推公式为 $a_{n+1} = ka_n + b (k, b \text{为常数})$,

则可设 $a_{n+1} + \lambda = k(a_n + \lambda)$. $\lambda = \frac{b}{k-1}$ 。

2. 若递推公式为 $a_{n+1} = ka_n + bc^n$,

则可设 $a_{n+1} + \lambda c^{n+1} = k(a_n + \lambda c^n)$ 。

例5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2)$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解: $\because a_n = 2a_{n-1} + 1, \therefore a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$, 又

$a_1 + 1 = 2$, 故数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列。∴ $a_n + 1 = 2^n$, 即 $a_n = 2^n - 1$ 。

例 6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 5^n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解: 令 $a_{n+1} + \lambda \times 5^{n+1} = 2(a_n + \lambda \times 5^n)$, 展开并移项得, $a_{n+1} = 2a_n - 3\lambda \times 5^n$, 把此式与 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 5^n$ 比照可得, $-3\lambda = 3, \lambda = -1$ 。所以 $a_{n+1} - 5^{n+1} = 2(a_n - 5^n)$, 数列 $\{a_n - 5^n\}$ 是以 $a_1 - 5^1 = 1$ 为首项, 以 2 为公比的等比数列。

$$a_n - 5^n = 1 \times 2^{n-1}, a_n = 5^n + 2^{n-1}.$$

(五) 取倒数法

如将一阶递推公式 $a_{n+1} = \frac{ca_n}{a_n + d}$ (c, d 为非零常数) 取

$$\text{倒数得 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{c};$$

例 7. 已知数列 $\{a_n\}$ ($n \in N^*$) 中, $a_1 = 1$,

$$\therefore a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 2a_n}, \text{ 求 } a_n.$$

$$\text{A. } 1 \quad \text{B. } \frac{2}{3} \quad \text{C. } \frac{2}{5} \quad \text{D. } -1$$

解: ∵ $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 2a_n}$, 两边取倒数, 得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2 \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} + 2, \quad \therefore \left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$$

是公差为 2 的等差数列, 首项 $\frac{1}{a_1} = 1$,

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1. \therefore a_n = \frac{1}{2n-1}.$$

(六) 已知 a_n 与 S_n 的等式求 a_n 。

当已知 a_n 与 S_n 的等式求 a_n 时, 往往用到化归思想。利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 使等式中只有 a_n 或 S_n , 从而得到递推公式, 再考虑用前面的方法。

例 8. 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{3}{2}a_n - 3$, 求

这个数列的通项公式 a_n 。

解: 当 $n=1$ 时, 由 $S_1 = \frac{3}{2}a_1 - 3 = a_1, a_1 = 6$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{3}{2}a_{n-1}, \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$, ∴ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 6, 公比为 3 的等比数列, ∴ $a_n = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$ 。

故 $a_n = 2 \cdot 3^n$ ($n \in N^*$)。

二、数列求和的方法

(一) 公式法

遇到数列求和时, 先判断该数列是否为等差或等比数列, 若是则用相应的求和公式, 若不是再考虑其他方法。

例 1. 求和: $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n$, 其中 $n \in N^*, a, b$ 是不为 0 的常数, 且 $a \neq b$ 。

解: 因为该和为首项是 a^n , 公比为 $\frac{b}{a}$ 的等比数列前 $n+1$ 项的和,

$$\text{所以原式} = \frac{a^n \left(1 - \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}} \right)}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

(二) 分组求和法

对于求数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 的和, 其中 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为等差或等比数列, 可考虑用拆项分组法求和。

例 2. 求和: $(2 - 3 \times 5^{-1}) + (4 - 3 \times 5^{-2}) + \dots + (2n - 3 \times 5^{-n})$ 。

分析: 该数列为两个数列的差, 其中 $\{2n\}$ 为等差数列, $\{3 \times 5^{-n}\}$ 为等比数列, 故可用拆项分组法求和法。

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= (2+4+6+\dots+2n) - (3 \times 5^{-1} + 3 \times 5^{-2} + \dots + 3 \times 5^{-n}) \\ &= \frac{n(2+2n)}{2} - 3 \times \frac{5^{-1}(1-5^{-n})}{1-5^{-1}} = n^2 + n - \frac{3}{4}(1-5^{-n}). \end{aligned}$$

(三) 错位相减法

对于求数列 $\{a_n b_n\}$, 其中 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 一个为等差数

列, 另一个为等比数列, 可考虑用错位相减法求和。

例3. 求数列 $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 。

分析: 该数列为两个数列的积, 其中 $\{n\}$ 为等差数列,

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 为等比数列, 故可考虑用错位相减法求和。

$$\text{解: } S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \quad \text{①},$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得, } \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}, \therefore S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

(四) 裂项相消法

需要掌握一些常见的裂项方法:

$$(1) \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right), \text{ 特别地当}$$

$$k=1 \text{ 时, } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}), \text{ 特别地}$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$(3) a_n = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

例4. 求数列 $\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{2 \times 4}, \frac{1}{3 \times 5}, \cdots, \frac{1}{n(n+2)}, \cdots$ 的前 n 项和 S_n 。

$$\text{解: } \because \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \therefore S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}.$$

(五) 并项求和法

一个数列的前 n 项和中, 可两两结合求解, 则称之为并项求和。形如 $a_n = (-1)^n f(n)$ 类型, 可采用两项合并求解。

例5. 求 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2$ 。

解: 当 n 是偶数时, S_n

$$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + [(n-1)^2 - n^2]$$

$$= -[3+7+11+\cdots+(2n-1)] = -\frac{\frac{n}{2}(3+2n-1)}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

当 n 是奇数时, S_n

$$= 1^2 + (-2^2 + 3^2) + (-4^2 + 5^2) + \cdots + [-(n-1)^2 + n^2]$$

$$= 1 + [5+9+13+\cdots+(2n-1)] = 1 + \frac{\frac{n-1}{2}(5+2n-1)}{2}$$

$$= 1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{综上, } S_n = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

结束语

本文重点介绍了高中数列问题, 重点题型及其解题方法。本文结合自己三十多年的教学实践, 总结出的一些解题心得。舍弃了一些不常出现的题型, 不常用难度较大的解题方法等, 掌握了以上这些, 解数列中的题目才能得心应手, 既快又准!

参考文献

[1] 杨正坤. 浅析高中数学数列试题的解题方法与技巧[J]. 2021.

[2] 蔡海军. “高中数学数列问题的求解方法.” 数理天地(高中版), 2022, 2: 47-48.