“平面向量数量积”的微专题教学赏析

刘一真

深圳科学高中

摘　要：新修订的高中数学课程标准强调大单元的设计理念，并且在大单元的划分下，细致每个专题的教学设计，从而更好的渗透高中数学学习方法，培养学生运用数学知识解决问题的能力。平面向量是连接数量关系与几何结构的桥梁，也是近年新高考的热门考点，本文从平面向量中最重要的一种运算关系——“平面向量的数量积”入手，浅谈在高中阶段如何上好一节平面向量数量积的微专题课程，并给出平面向量数量积一课的教学设计，给广大一线教师的高三一轮复习专题课程提供支持。

关键词：平面向量；数量积；微专题教学；一题多解

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2023.07.124

“平面向量”相关考点频繁的出现在近年新高考的考题中，向量作为一个联系着代数和几何的桥梁，在高中数学体系里有着至关重要的地位，它不仅与三角函数、平面几何、解析几何、复数、数列、不等关系等知识紧密相关，上升到空间维度，更是与立体几何也紧密相连。

在新修订的高中数学教科书中，平面向量的教学内容不仅注重基础知识、公式、定理、法则的掌握与运用，还注重概念、定理的形成过程，凸显向量的灵活运用价值，需要一线教师在教学过程中选好素材、一题多解，为了更好的组织教学、还有提高有效运用数学工具解决问题的能力，最重要的还是为了学生的数学理解，我们一线数学教师应更加注重教学，让学生学会数学的思考问题，前提是我们自身要对数学有深刻的理解，才可以从容的应对教学。

平面向量数量积是“平面向量”大单元课程中的一个小专题，它里面也包含了诸多重要的数学概念与思想方法，在新授课中需要花费不少时间理解概念原理，并强化训练，但是在高三复习课程中，更注重学生对重难点内容的突破，对核心方法的理解及使用，并且掌握不同的解题思路与技巧，能应对更丰富的变式及更广泛的运用。选择微专题的好处还有效的避免了“只记公式、题海战术”的教学方式，这种教学明显不能促进师生对平面向量知识的理解。对概念、法则、定理的发生发展过程的不了解，会导致知其然不知其所以然，久而久之也不会有好的解决问题的能力。平面向量知识在高中数学知识体系中占据重要的地位，但是在高三一轮课程安排中，平面向量的课时较少，需要在有限的课时中展现平面向量的全部内容。

因此，微专题就是一种很好的选择，既可以强化理解与应用，又能高效的完成教学任务。在日常教学中，教师既要注重学生逻辑思维的培养，又要注重学生直观想象与数学运算能力的提升，这些也都是新课标强调的数学核心素养。如何在日常教学中进行这些核心素养的渗透才是重中之重，在教学中，教师要善于将问题归类，将方法归类，结合充分的引导，创造合适的情景，但是高三课堂时间紧任务重，如何更有效的提升效率？教师便可采用这种微专题的方式，可以精准突破一个个小的专题，从而达到很好的教学效果。通过精心设计的问题，让学生体验数形结合的思想，感受一题多解的魅力，掌握“平面向量数量积”的各个知识要点，也让学生采用讨论交流等方式，在教师的引导下，提高学生的自主探究空间，并在解决问题后，让学生自己总结解答问题的流程，规范书写，并形成严谨的解题步骤，最终达到举一反三的效果。课后配套的练习也需要精心编制，既能让学生巩固不同的解法，有能让学生得到成功的体验，并掌握不同的解法，能在不同的情境中选择最合适的思路解决问题。因此，我选在微专题来进行“平面向量数量积”的专题教学，通过改编题目、串联题目，达到以少胜多的作用，通过一个问题将所有知识点串在一起，做到了在结合教材、课程标准的前提下，又充分的发挥了主观能动性，促进学生思考、成长，让学生进行成功的问题解决体验。

在“平面向量数量积”的微专题一课的教学中，我设计的教学思路如下。

1、知识回顾：复习梳理平面向量数量积的定义、运算律、坐标表示、常见的性质等。

2、典型例题讲解：通过“一题多解”的思想，用不同方法解决一个问题，帮助同学们熟悉不同的解题方法及其步骤，掌握、理解数形结合的思想。

3、解法归纳：通过对方法的提炼，帮助同学们掌握平面向量数量积的一般解法，拓展同学们的解题思

路，规范同学们的解题步骤。

4、课后练习：设计了一些不同的平面向量数量积的练习，帮助同学们课后掌握平面向量数量积的解法，进行提升。

结合新课程标准对“平面向量数量积”一课的要求，在“平面向量数量积”的微专题一课的教学中，我设计的教学目的是：掌握平面向量数量积及其几何意义，掌握平面向量数量积的重要性质，会用坐标法进行平面向量数量积的运算，提升综合运用平面向量数量积解决代数、几何等问题的能力。教学的重点是：平面向量数量积的定义及其性质。教学难点是：平面向量数量积的几何意义，以及在解决解三角形等几何问题中的实际运用，掌握极化恒等式法。

接下来，我细致分解一下“平面向量数量积”微专题的教学环节。

在第一板块——知识回顾中，首先带领学生复习回顾如下重要知识点：

1、复习回顾平面向量数量积的定义：已知两个非零向量a与b,它们的夹角为θ,我们把数量|a||b|cosθ叫作向量a与b的数量积（或内积），记作a•b，即a•b=|a||b|cosθ.同时规定:零向量与任一向量的数量积为0,即0•a=0.

2、复习回顾平面向量数量积的运算律：

对于向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$和实数$\lambda$,有

① 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

② 数乘结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

③ 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

3、复习回顾平面向量数量积的坐标表示，尤其是求模、求夹角、垂直位置关系的判断等；

4、复习回顾平面向量数量积的性质，特别是几何意义、求投影等问题：|a|cosθ叫作向量a在b方向上的投影，|b|cosθ叫作向量b在a方向上的投影，数量积a•b等于a的长度|a|与b在a的方向上的投影|b|cosθ的乘积。

在第二板块——典型例题中，通过如下题目切入，使用一题多解的教学手段，帮助学生掌握平面向量的相关知识，打开解决问题的新思路，从而更好的理解及使用平面向量工具。

题目：在△ABC中，已知AB=2,AC=4,∠BAC=60°,M为线段BC的中点，N为线段AC上一动点，则$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BN}$的最小值为__________.

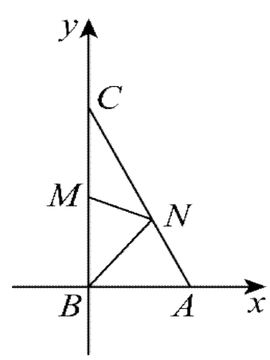
这里提供如下解法：

解法一：基向量法。

我们可以选择已知长度和夹角的一组线段，利用其长度和方向两个维度建立基底，如何适当的选取一组基底呢？可以优先考虑三角形的邻边！在得到基底向量后，我们努力将所求向量分解成基底，用基向量进行表示，这就需要教师引导学生写出向量之间的联系，利用向量共线构造关于设定未知量的方程来进行求解。在本题的向量分解与转换中，还考察了中线向量的表示，这里教师们可以拓展共线向量该如何表示，以及向量数量积的基本运算，通过本解法，可以帮助同学们掌握解决平面向量数量积的一般解法，强化其基本运算能力，本题在化简的过程中有一定的计算量，教师引导学生一步一步完成计算，在最后求解最值的过程中，还需要用到二次函数求最值的思想，成功将向量问题与函数不等式问题相结合。在总结这个解法的过程中，也引导学生重视解三角形的基本原理，强化平面向量与解三角形的交互训练，也打开了下一种解法的思路。

解法二：坐标法。

在解法一的小节中，我们可以利用解三角形的边角关系，知三求三，发现该三角形其实是特殊的直角三角形！在平面向量问题中，如果遇到适合建系、好建系的题目，可以优先考虑建立平面直角坐标系，也就是把几何图形放在适当的坐标系中，就赋予了有关点与向量具体的坐标，这样就能进行相应的代数运算和向量运算，从而使问题得到解决。本题可以解出角B是直角，可以建立如下图所示的平面直角坐标系，建好系后，将所求向量对应点的坐标表示出来，而动点的坐标同解法一样，可以使用共线向量的设法，最后求解最值的过程也同解法一一致。



解法三：极化恒等式法。

先介绍一下极化恒等式，设a,b为两个平面向量，则有a•b=$\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

极化恒等式的本质是：平面向量的数量积运算可以转化为平面向量线性运算的模。

这里在教学过程中，建议教师们结合平面向量加法、减法的平行四边形作图，帮助同学们理解极化恒等式的本质，也就是将平面向量数量积问题转化为向量模长问题，最后通过模长或者模的取值范围来求解平面向量数量积。在本题中，我们知道三角形的中线，因此可以通过极化恒等式，很快的表示出所求向量，并将其转化为向量的模。对比前面两种解法，解法三可以更快地完成计算，优化解题过程，在实战中凸显优势。因此，遇到这类型适合的情景，可以使用极化恒等式快速求解问题。

解法四：投影法。

利用向量数量积的几何意义，可以将平面向量数量积转化为投影问题求解。在本题中，可以将要求数量积的两个向量中的一个投影至另一个向量上，通过几何意义研究所求解的问题。本解法也体现的是一种转换的思想，将代数运算转化至几何图形，通过研究其几何变化规律解决问题，充分体现了数形结合的思想，在不少解析几何与平面向量相结合的小题中，可以利用此方法求得边界值，对于小题的计算更能体现其优势。

在引导完学生运用不同的解法解决同一道问题后，让学生用自己的语言总结这些方法，并形成解题步骤，在今后遇到类似的问题时，也可以采用类似的手段进行解答。结合上述题目“一题多解”的过程，以及实际教学中的反馈，我将本节“平面向量数量积”微专题课程总结如下。

首先，该教学设计针对的对象主要是高三一轮或二轮复习的学生，故在知识点回顾、复习中，更侧重的是定义、性质及其应用。

其次，一轮复习的题量较多，为了更高效、更有效的帮助同学们学会解题，本设计提供的题目解题思路多，适合一题多解，能够帮助学生打开思路，并能通过不同的解题方法强化定义、性质的使用。其中，极化恒等式在解三角形中的应用也是比较广泛的，不少同学还不会正确的使用该方法，甚至有同学不知道该方法，因此，这个方法可以作为一个拓展提升。

最后，将所有的方法进行提炼与总结，帮助同学们在遇到不同的问题情景时，选择合适的解题方法。由于是微专题，必备的配套练习不能少。所以，课后，我也精心搭配了几道练习，所配套的练习也均有各种不同的解题方法，可以参考本题目的不同解法进行拓展，从而更好的帮助同学们在课后进行巩固与提升。这里提供一些课后练习题目：

题目1．在△ABC中，AB=3，$AC=2\sqrt{3}$，∠BAC=150°，D在BC上，且满足$\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

题目2．在△ABC中，∠BCA=90°，BA=2BC=2．设$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}\left(\lambda\in[0,1]\right)$，则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围为______.

题目3．如图，在△ABC中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，P为CD上一点，且满足$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\left(m\in\mathbf{R}\right)$，若AC=2，AB=4，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}$的值为______.

题目4．在矩形ABCD中，AB=1，$AD=\sqrt{3}$，点M在对角线AC上，点N在边CD上，且$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

题目5．平面四边形ABCD是边长为2的菱形，且∠A=120°，点N是DC边上的点，且$\overrightarrow{DN}=3\overrightarrow{NC}$，点M是四边形ABCD内或边界上的一个动点，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最大值为______.

题目6．如图，网格纸上小正方形的边长为1．从A，B，C，D四点中任取两个点作为向量$\vec{b}$的始点和终点，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值为___________.

本节“平面向量数量积”的微专题教学设计还是注重“小而精”，帮助学生既可以使用“基底法”、“坐标法”等常规方法来求解平面向量数量积问题，又可以通过平面向量数量积的几何意义，使用“投影法”、“极化恒等式法”等数形结合的手段解决问题，从而深化学生对平面向量数量积的理解，体会其强大的运用与广泛的变形。既要重视基础的运算能力，又要掌握变形、化简的技巧与方法，才能有效的提高学生的分析问题、解决问题的能力。

参考文献

[1]於家海．厚植“三个理解”，笃行核心素养——以“平面向量数量积的坐标表示”教学为例 [J]．中学数学,2022(10):22-24.

[2]项丽红．近十年高考数学全国卷“平面向量”试题分析及教学思考[J]．中学数学月刊,2022(3):48-50.

[3]孙愉．高三数学问题解决教学中辅助问题设计的实践研究[D]．华东师范大学,2022.