由0.$\dot{9}$=1再议无穷小量

徐新艳　董艳青　刘真真

郑州职业技术学院；通识教育学院

摘　要：本文基于无穷小量在微积分中0.$\dot{9}$=1的重要性以及基础性，反观在教学中对无穷小量理解上的困难，从对的证明出发，使人们体会无穷的复杂性，在实数域内的理论证明与主观感受上的反差带来的理解上的麻烦.进而引出无穷小量，梳理其几个世纪以来人们对无穷小量不断探索的过程，最后从实数的连续性与主观上对连续性的认识，提炼出无穷小量在实数的连续性上充当“黏合剂”的作用，从而更好地理解无穷小量.

关键词：无穷；无穷小量；实数域；黏合剂

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2023.08.149

一、0.$\dot{9}$=1

由华东师范大学数学系编写、高等教育出版社出版的《数学分析》教材，在第一章第一节实数的开篇就规定：对于正有限小数（包括正整数）x，当$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$时，其中$0\le a_i\le 9, i=1,2,\cdots,n, a_n\ne 0, a_0$为非负整数，记$x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)\dot{9}$，而当$x=a_0$为正整数时，则记$x=(a_0-1).9999\cdots$，比如0.$\dot{9}$=1，在这样一波操作下，在后续内容的强化下，大多数学生慢慢的便也接受了这一规定.当然也有同学对此会有疑惑，无限循环在脑海中怎么也循环不出来个1，从而掉进一个思维陷阱.对0.$\dot{9}$=1的证明也是层出不穷，比如：

方法1 因为$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$，所以$1=3\times\frac{1}{3}=0.\dot{3}\times 3=0.\dot{9}$.

方法2　设x=0.$\dot{9}$，则$10x=9.\dot{9}=9+0.\dot{9}$，从而$10x=9+x$，解方程可得$x$=1，即0.$\dot{9}$=1.

以上两个方法乍一看思路还是满清晰的，但仔细一想，其实是一个循环论证方式，用无限循环来证明无限循环，而且我们从前所学习的加减乘除运算法则几乎没有直接作用于无限循环小数的，事实上，涉及无穷，我们常规的有限的运算法则是失效的，比如，对于加法运算法则作用于无限

$$\begin{aligned}0&=0+0+0+\cdots\\&=1-1+1-1+1-1+\cdots\\&=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\\&=1+0+0+0+\cdots\\&=1\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}0&=0+0+0+\cdots\\&=-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\\&=-1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\\&=-1+0+0+0+\cdots\\&=-1\end{aligned}$$

再比如乘法运算法则作用于无限

设 $\dot{9}.0=x$

则 $10\times\dot{9}.0=10x$　　①

即 $\dot{9}0.0=10x$　　②

①—②可得 $9=-9x$

从而$\dot{9}.0=x=-1$

不难看出，上述的计算结果是荒谬的，事实上这涉及级数收敛与发散的性质，但总体来说这也说明了对于有限的数的四则运算法则以及一些运算规律是不能盲目作用于无限的.再者，0.9…是一个过程，而1是一个数，过程怎么会等于一个数呢？关于无限，还有很多新奇或者说奇怪的例子，比如

$$\frac{1}{9}=0.\dot{1},\quad \frac{2}{9}=0.\dot{2},\quad \frac{3}{9}=0.\dot{3},\quad \cdots\quad \frac{8}{9}=0.\dot{8},\quad \frac{9}{9}=0.\dot{9}\quad ???$$

而 $\frac{9}{9}=1$

关于上边的现象，著名的华裔数学家陶哲轩在他出版的《陶哲轩实分析》中说：“这是十进制的一个“毛疵”，尽管是“小小的”.”面对无穷，正如Hilbert所说：“无穷！还没有别的问题如此深地打动人们的心灵，也没有别的想法如此有效地激发人的智慧，更没有别的概念比无穷这个概念更需要澄清.”

方法3

因为$0.\dot{9}=0.9+0.09+0.009+\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}$

利用等比数列求和公式可得：

$$0.\dot{9}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{9}{10}(1-\frac{1}{10^n})}{1-\frac{1}{10}}\right)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{10^n})=1$$

上述方法用到了极限，但对极限的理解是无限接近，要多接近就能有多接近，可以说心之所向，皆能实现，但不能肯定的说0.$\dot{9}$=1.当然，老师也会强调说极限严谨的表述方式是用“ε－δ”数学语言来表述，但思来想去，还是得不到内心那份笃定.事实上0.$\dot{9}$=1这个问

题确实是复杂的，因为他涉及了一个底层问题，实数是如何构造的？这个问题实际上连牛顿和欧拉这个级别的大数学家也没有严谨的解决掉，而真正解决并有较高影响力的是柯西和戴德金，他们构造实数，各自都有自己的流派，柯西的主要工具是柯西序列，戴德金的主要工具是戴德金分割.

在1970年，在格里菲斯和希尔顿出版的书《一本经典数学的综合教科书：一个当代的阐释》中，用柯西序列给出了证明.

定义 关于$\{x_n\}$,对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数N，使得当$n,m>N$时成立$|x_n-x_m|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是一个柯西序列.

等价的柯西序列 关于柯西序列$\{a_n\},\{b_n\}$,若$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时，有$|a_n-b_n|<\varepsilon$，则称$\{a_n\},\{b_n\}$是等价的序列.

实数相等 形如$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$的对象叫实数，其中$\{a_n\}$是有理数的一个柯西序列，两实数$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$是相等的，当且仅当$\{a_n\},\{b_n\}$是等价的序列.

下面证明$0.\dot{9}$=1的问题.

方法4 构造两个柯西序列：

$\{a_n\}=\{1\}$

$\{b_n\}=\{1-10^{-n}\}$

令 $|a_n-b_n|=10^{-n}<\varepsilon$

则 $n>\lg\dfrac{1}{\varepsilon}$

可知$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\lg\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$,当$n>N$时，有$|a_n-b_n|<\varepsilon$，从而$\{a_n\},\{b_n\}$是等价的序列.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

所以 $0.\dot{9}=1$

在1998年，弗雷德.里奇曼在发表的文章《0.999...等于1吗？》中，用戴德金分割给出了一个证明方式.

戴德金分割法 将实数集分成两个集合A和B，且满足下列条件

（1）$A\neq\varnothing,B\neq\varnothing$;

（2）$A\cup B=R$;

（3）$\forall a\in A,\forall b\in B$,总满足$a<b$.

则称A和B是实数域的一个分割，记为$(A|B)$.A称为分割的左集，B称为分割的右集.

下面证明$0.\dot{9}$=1的问题.

方法5（反证法）构造集合$A=(-\infty,1),B=[1,+\infty)$,显然$A,B$满足戴德金分割.

假设$0.\dot{9}<1$，显然1是集合B中最小的元素，$0.\dot{9}$只能在集合A中了，且在集合A中无法找到大于$0.\dot{9}$的数字.

但是，若令$x=\dfrac{0.\dot{9}+1}{2}$,显然$0.\dot{9}<x<1$，而x只能在集合A中，这与在集合A中无法找到大于$0.\dot{9}$的数字是矛盾的，从而$0.\dot{9}$=1.

1982年，巴图和谢波特在《实分析引论》中给出了用区间套证明的方法.

定义 设闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$具有下列性质：

（1）$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,3,\cdots$;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$

则称$\{[a_n,b_n]\}$为闭区间套，简称为区间套.

区间套定理 若$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点ξ，使得$\xi\subset[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$，即$a_n\le\xi\le b_n,n=1,2,\cdots$

方法6 根据区间套定理，给定一组区间套，则数轴上恰有一点包含在所有这些区间中.$0.\dot{9}$对应于区间套$[0,1],[0.9,1],[0.99,1],[0.999,1],\cdots$,而所有这些区间的唯一交点就是1，$\xi$=1，也即$0.\dot{9}$与1之间没有其他数，所以$0.\dot{9}$=1.

除此之外，还有一些其他的证明方法，比如

方法7（反证法）若$0.\dot{9}\neq1$，则$|1-0.\dot{9}|=a$，a为某一确定的实数，则

$a=|1-0.\dot{9}|<\left|1-0.\overbrace{9\cdots9}^{n个9}\right|=\left|0.\overbrace{0\cdots0}^{n-1个0}1\right|=10^{-n}$，从而若令$a=10^{-100}$，则从上边不等式容易得到$a=10^{-100}<10^{-101}$，矛盾.

二、理论上的证明无法消除大家主观上的疑惑

可以说对$0.\dot{9}$=1的证明方式越来越多样化越来越完备，然而，学生们的疑惑却从来没有因此而减少，在品托（Pinto）和大卫.托的一项调查报告中写到：当学生用高等的方法证明了该等式之后，依旧会表现得很惊讶，不对不对，0.9...显然比1小啊！！！在如今的互联网上，该等式的魅力不减当年，辩论“0.9...等不等于1”被讨论组sci.math评为“最受欢迎的运动”.不管理论上的证明有多严谨也不能说服大家主观上的感受，$0.\dot{9}$与1之间总感觉差点什么，那就是微积分中所定义的

无穷小量.

在17世纪，微积分中无穷小量的使用引发了第二次数学危机，数学家们在既是零又不是零的矛盾中纠结，但又因为其实用性而在不断地发展着. 其实，牛顿当初在他发表的微积分论文《求曲边形的面积》中扔掉无穷小项的做法内心深感不安，为了寻找内心的安慰，他在《原理》中详细论述了关于他的最终比和理性，但是他的微积分的合理性是以直观的量的连续性为终点的.牛顿的初量与终量的比值“是很严格的表述”，但这种严格表述只是量的拓扑性质，并不是传统的数的序或者代数关系.

无穷小量在整个微积分的发展史中扮演着不可或缺的角色，人们对无穷小量的认识经历了几千年漫长、曲折的过程，之所以曲折和漫长，在本质上是因为我们人类有限的思维和认知在面对无法触摸的无穷时所引起的认识上的困难.也正因为如此，人们对无穷小理论的研究也从未停止.到目前为止，人们对无穷小量的认识大概可以分为以下几个阶段：大约公元前5世纪，无穷思想便开始萌芽；自19世纪，数学家们将无穷小量作为其极限为零的变量开始使用，进入潜无穷的认识阶段；19世纪70年代，人们对无穷小量的认识随着集合论的建立，进入到实无穷阶段；20世纪60年代建立的非标准分析，将实数域扩大到超实数域，其中对单子结构的分析，是认识无穷小的一个本质进步；20世纪80年代“超弦”理论的兴起，为无穷小理论的研究提供了新模型.无穷这一人类难以触摸的现象反而激发了人类不断探索的热情，在实践、认识、再实践、再认识的循环往复中启迪着人类的智慧.

随着时代的发展，人们对无穷小量的认识也在不断深化，然而，在高等数学教学中，老师们对于极限、无穷小量概念的讲解是粗略的，学生对这些概念的理解还是比较空洞、模棱两可的，极限概念中无限接近到底能有多接近，能不能等于？无穷小是要多小就能有多小，到底有多小？人们习惯于追求一种确定性.但由于无穷小量在整个微积分中的基础性，人们大多只能无奈的将其作为解决问题的工具在使用.有人说，微积分的“真”来自它正确的计算结果.

三、寻找关于无穷小量的存在形式

再来看对$0.\dot{9}=1$的证明，抛除前两种比较想当然的证明方式，极限的证明方式其实还是一个无限接近，尽管可以使用严谨的“$\varepsilon-\delta$”数学语言.而后边的柯西序列证明和区间套定理证明也只能囿于实数的范畴，以实数的完备性，也即实数的连续性为前提的，那么，我们不妨就来分析一下实数的连续性，连续使得数与数之间没有缝隙，若$0.\dot{9}=1$，就意味着它们两个之间没有缝隙，从而也意味着他们是同一个点，那么以此类推那么数轴上的数将只能是一个点.而我们直观上理解并接受的连续是你中有我我中有你的状态，是通过某种介质粘连在一起的，而这种介质我认为就是无穷小量，就像是一种力，就像一个方程式，一个函数将各个变量联系起来.龚友运等在“论数学的基础——相对无限分析初步”中说：“实数是由抽象的理论点和以无穷小空间形式存在的点合在一起而构成的.无限循环小数以及无理数属于同一类“点”，换句话说，若有限小数为一种抽象点，则无限小数将为另一种性质的“具体点”，它们本质不同.在几何上，线段的长度是由“具体点”构成，抽象点是后一种“具体点”的“黏合剂”.而实数的连续性是将有大小的点利用无大小的点黏合起来的”.

无穷小量在现实中的作用是巨大的，对它的认识理解是困难的，也曾引起人们在哲学上的思考，匡继昌在“现代数学的哲学思考”中提出：“21世纪的哲学家学习现代数学，数学家学习哲学，对于数学与哲学的发展都具有重大而深远的意义.”总之，随着时间的推移，凭着我们认识、实践、再认识、再实践这样循环往复又不断深化的过程，我们会对无穷小量理解的更加深入，也更能浅出.

参考文献

[1]龚友运，徐春平，伍超林等.论数学的基础——相对无限分析初步[J].数学学习与研究，2018，（17）：147-152.

[2]汤程远，李英.说“无穷小量”[J].贵阳金筑大学学报，2022，（03）：95-97.

[3]匡继昌.微积分和无穷小量的哲学思考[J].数学教育学报，2007，（02）：1-3.

[4]陈学云.无穷小量的命运及对数学发展动力的思考[J].自然辩证法研究，2005，（01）：41-43+72.

[5]李玮，谢琳.一种将数学神秘化的倾向——评《无穷小量的命运及对数学发展动力的思考》一文[J].数学研究与评论，2007，（04）：967-970.