注重生活体验 培养核心素养

郑和赏
苍南县宜山高级中学

摘　要：数学课程修订从“三大能力”到“四基”、“四能”再到六大“核心素养”，是社会生产力发展的结果，是科技迅猛发展对数学教育提出的要求。原课程修订组组长张奠宙先生就新课程修订的标准提出：数学要加强生活体验成分，还原数学原来的美丽生动。为此，我们在备课过程中，从一道古希腊数学名题引入，站在数学文化角度引入课题，让名题回归生活，再回到教材，尽可能还原数学原来生动的一面，注重学生生活体验，着力培养学生的核心素养。

关键词：数学文化；生活体验；核心素养
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2023.08.119

在一次主题研训活动中，笔者参与听课磨课，一位老师开出了一节圆锥曲线复习课：

首先，复习圆锥曲线和直线位置关系；然后，一起回忆了弦长公式和两点间距离公式。最后，讲解了以下两例题；

例题1：（2012春　嵊州市期中）长为2的线段AB的两个端点分别在x轴、y轴上滑动，那么线段AB中点的轨迹是什么？

例题2：金丽衢十二校2016届高三数学二模试卷（理科）若直线l交抛物线C：$y^2=2px$（p＞0）于两不同点A，B，且|AB|=3p，则线段AB中点M到y轴距离的最小值为（　　）

A. $\frac{p}{2}$　　B. p　　C. $\frac{3p}{2}$　　D. 2p

追问：若线段长度为a(a>0)时候，最小值又为多少呢？

……

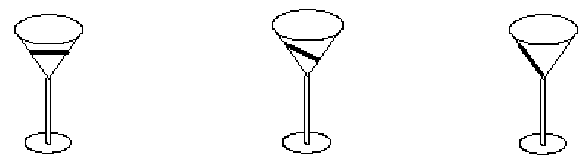
小结

对这样一节经典复习课，从线段中点问题研究直线和圆锥曲线位置关系，课后，我们总觉得少些什么？笔者提出能否围绕核心素养备课？回想起2015年11月浙江省课程基地建设研讨会，修订组组长王尚志先生提出，数学课要符合新时代要求，强调生活体验，渗透数学文化，将数学建模这个短板补齐。为此备课组围绕六大核心素养备课，进行二轮、三轮磨课。焦点聚集在新一轮课程标准修订热点问题上，为此，在复习圆锥曲线过程中，首先，翻阅了不同版本教材，尔后一起做教学设计。通过磨课，一堂给予核心素养的圆锥曲线复习课逐步成型。且做且思：在新的课改时代背景下，我们如何将问题设计在学生最近发展区，又能体现学科核心素养，我们不断磨课，不断研讨。通过还原一道历史名题——普洛克拉斯轨迹问题。借助苏教版选修2—1第68页第10题：一只酒杯的轴截面是抛物线的一部分，它的方程是$x^2=2y(0\leqslant y\leqslant 20)$.在杯内放一个玻璃球，要使球触及酒杯底部，那么玻璃球的半径r应满足什么条件?设计一节复习课，基于历史名题，着眼数学文化和数学体验，提升核心素养。

一、注重生活体验　培养数学建模能力

数学因为抽象而魅力四射，因为抽象而让部分同学意乱情迷，因为悠久而芳香四溢。为此，我们从历史名题入手，即1000多年前古希腊数学家普洛克拉斯轨迹问题的：在固定直线上标有三个点，其中两个点沿一个直角的两条边滑动，问第三点的轨迹是什么？将该题改编成注重数学建模能力培养的引题。

引题：有朋自远方来，家中小聚，在调酒时，不小心将一根粗细均匀，长度为M的细棒掉进了直角酒杯中，那么当细棒最后达到平衡状态时，细棒在酒杯中的位置应该是哪一种情形？请加以说明。（假设细棒的端点与酒杯壁之间的摩擦可以忽略不计）



幻灯片呈现不倒翁和平衡杆图像，引导学生明白物理常识——重心越低，物体越容易平衡；粗细均匀的光滑细棒表明忽略摩擦力，细棒的粗细均匀指明细棒的平衡状态也就是细棒重心（即中心）处于最低位置的状态。采用选择题方式，配以flash动画，加强学生对生活中数学的体验，激发学生探知动机。

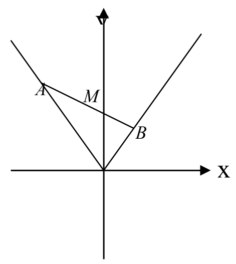
引导学生自主构建数学建模，按照一般步骤：生活问题——（抽象）数学问题——问题转化。首先建立坐标系，然后引导学生归纳：定长为m的线段AB的两个端点在折线y=｜x｜上移动，确定AB的位置，使中点M到x轴的距离最小。

这一新的引入基于生活情境，抛弃干巴巴的文字叙述，我们认为有益于学生的生活体验，可以培养学生“数学建模”能力，尽力帮助学生补上这块“短板”。同时，帮助学生更深刻理解数学，体验数学研究的过程；鼓励学生发挥自己的想象力和创造性，从而提升核心素养。

二、联系生活实际，培养直观想象能力

利用图像描述，建立数与形的联系，构建数学模型。将实际问题抽象成数学模型以后，联系生活实际，提炼出问题的本质：要看M点何时距x轴最近，最直观的是看M的轨迹，由直角三角形性质得到｜OM｜=$\frac{1}{2}$

$|AB|=\frac{1}{2}m$ 。 接着一个步骤：解决数学问题——还原实际问题——解决实际问题，所以我们得到： M点也就是到一定点O的距离等于定长$\frac{1}{2}m$的点的轨迹，换句话说，也就是M表示一个圆的一段弧（出示几何画板，将M点的运动轨迹选择“跟踪点”），发现当线段贴着杯壁的时候，我们的中点轨迹最低。这样我们便可以确认应该是C正确。这个跟我们生活实际情况吻合，学生容易理解其中的缘由，也培养了学生直观想象能力。借助几何直观，感知事物的的形态和变化，利用图形帮助理解数学问题，进而培养学生的直观想象能力。有意识培养学生联系生活实际，利用数形结合思想解决问题，能够培养学生直观想象能力。

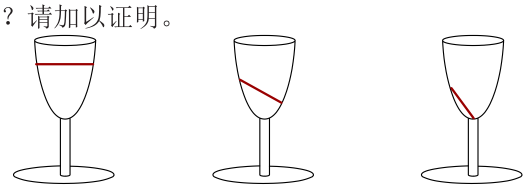


三、承接知识脉络，培养学生逻辑推理能力

从特殊的直角酒杯背景引入，我们请同学猜想，在数学建模中，利用数形结合思想，我们解决了简单的直角三角形背景的问题。继而提出：若酒杯形状改变，你可以提出什么问题？联系生活实际，学生很容易就提出了，如果酒杯是抛物线型、椭圆型或双曲线型时怎么办？很自然将原来设计改编成如下问题：

原题：金丽衢十二校2016届高三数学二模试卷（理科）若直线l交抛物线C：$y^2=2px$（p＞0）于两不同点A，B，且|AB|=3p，求线段AB中点M到y轴距离的最小值。

改编题：如果长度为 m的细棒掉进了抛物线酒杯中（杯口宽$4\sqrt{2}$ cm ,杯深8cm，为了计算方便，我们一起做了这个约定），细棒在酒杯中的位置应该是下在哪一种情形？请加以证明。



承接第一个问题脉络，和学生一起将该问题可以抽象成数学问题：长度为m的线段AB在抛物线上运动，在何位置时，线段AB的中点P到准线距离最短？由数形结合思想，学生容易想到图形，如图所示，由抛物线定义可知|AC|=|AF|,|BD|=|BF|由两点间距离线段最短，我们容易引导学生进行合理的推理，进而可以得到以下式子：

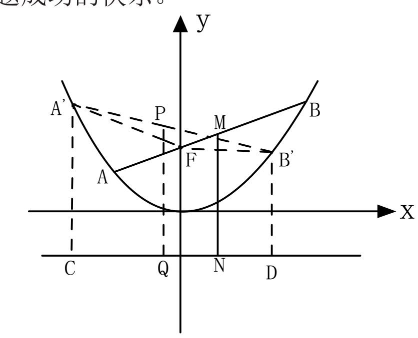
$$|MN|=\frac{1}{2}|AB|,|PQ|=\frac{1}{2}(|A'C|+|B'D|)=\frac{1}{2}(|A'F|+|B'F|)\geq\frac{1}{2}|A'B'|=|MN|$$

$$\therefore |PQ|\geq|MN|$$

故过焦点的线段AB的中点到准线距离最短。

将问题建立在学生最近发展区，从已有的知识结构出发，承接原有知识脉络，引导学生探索、发现，从而培养学生逻辑推理能力。

在原题基础上对问题进行一般化，将问题设计建立在数学建模能力培养上，有意识培养孩子数学建模和抽象能力。讲好这个问题后，展示原题，让孩子体验解决实际考题成功的快乐。



四、运用数学运算，培养数据分析能力

用数形结合思想貌似很好地解决了问题，而该问题是典型的直线与圆锥曲线位置关系问题，除了数形结合，还有代数方法：

解：设直线AB的方程为： $y=kx+b$ 。

$$\begin{cases} x \qquad py \\ y=kx+b \end{cases} \Rightarrow x \ -2pkx-2pb=0 ,$$

由韦达定理可知AB的中点M(pk,pk^2+b)， 点M到准线$y=-\frac{p}{2}$的距离$d=|pk^2+b+\frac{p}{2}|\cdots$①,

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{4p^2k^2+8pb}=m ,$$

$\therefore \quad b=\frac{1}{8p}(\frac{m^2}{1+k^2}-4p^2k^2)$ ， 代 入 ① 得 ： $d=\frac{p(k^2+1)}{2}+\frac{m^2}{8p(1+k^2)}\geq 2\sqrt{\frac{m^2}{16}}=\frac{m}{2}$ ， 当 且 仅 当 $\frac{p(k^2+1)}{2}=\frac{m^2}{8p(1+k^2)}$时，取“＝”，

$\therefore 1+k^2=\frac{m}{2p}$,

又$\because m<2p$,

$\therefore 1+k^2=\frac{m}{2p}<1$，k无解，因此只有当$k=0$时， d有最小值。

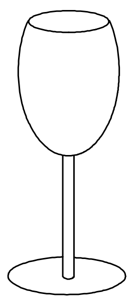
通过数学运算，对数据进行分析，我们修补了数形结合方法的漏洞：提出以下问题：

①长度满足什么条件，平衡时经过焦点和不经过焦点？②平衡时的位置状态跟它的长度有什么关系？数据结论分析了问题本质：长度大于抛物线的通径时，其平衡时的位置状态是经过焦点并倾斜的；当玻璃棒的长度不大于通径时，其位置状态是不经过焦点并但与水平面是平行的。该问题用数学语言表达，上述的数学试验我们可以提炼出这样的问题：已知抛物线$x^2=2py$上有一动弦AB，且$|AB|=m$（定值），（1）若弦AB经过抛物线焦点，且$|AB|>2p$，求弦AB的斜率；（2）若$|AB|\leq 2p$，当AB的中点M到准线距离最小时，求证：$k_{AB}=0$ 。”

用代数运算，培养学生数据分析能力，正如华罗庚先生所述，形无数不入微，数无形不具体。运用抛物线型酒杯中的线段中点问题获得的数据，培养学生数学运算能力，借助数学运算对问题进行分析，促进分析问题的能力发展，是我们数学核心素养之一，依托数据探索

问题的本质而获得相应的能力。

追问1：如果在椭圆酒杯中（杯口宽4cm，杯深为9cm，中间最宽处距杯底为5cm），细棒在酒杯中的位置又将如何？（课后完成）通过运算，我们一起得到如下数据：



以椭圆中心为原点建立直角坐标系，得到椭圆方程$\frac{y^2}{25}+\frac{9x^2}{100}=1$，其通径为$\frac{40}{9}$。

（1）若$m\geq\frac{40}{9}$，则细棒过焦点时，达到平衡状态。

（2）若$m<\frac{40}{9}$，则细棒水平放置时，达到平衡状态。

由此，通过加强数学计算能力，培养孩子数据分析能力。与数形结合思想相辅相成。

五、由题内引外联，培养学生数学抽象能力

数学是对事物本质属性的抽象，因为抽象，数学课程舍弃了数学原有的美丽婉约，留下的是符号图形的骷髅。为此，在问题设置中，我们尽量考虑学生最近发展区，在将引例讲完之后，可以由题目内引外联，抽象出问题的本质属性，从具体背景中抽象出问题的一般规律和结构。通过抽象，帮助孩子学会举一反三，养成一般性思考问题的习惯，以达到提高提出问题和分析问题能力。

追问2，如果细棒换成球又可以做哪些数学学问?回到开始备课的课本例题。

学生容易想到问题，球何时与酒杯底部相切，为此与学生一起赏析课本题目：

一只酒杯的轴截面是抛物线的一部分，它的方程是$x^2=2y(0\leq y\leq 20)$.在杯内放一个玻璃球，要使球触及酒杯底部，那么玻璃球的半径r应满足什么条件？（苏教版选修2—1第68页第10题）。

本题是以抛物线为背景的一道应用题，是一道数学建模题目,转化为数学问题后可以从不同的视角求解，一题多解可以培养学生抽象能力。

解法1（几何法）

由题意得可设玻璃球轴截面方程为：$x^2+(y-r)^2=r^2$，即$x^2+y^2-2ry=0$联立方程：

$\begin{cases}x^2+(y-r)^2=r^2\\x^2=2y\end{cases}$得$y^2-2(r-1)y=0$，亦有$y=0$或$y=1$

依题意，得0<r<1.

解法2（函数最值）

设A(0,r)（r>0），设抛物线上任意一点P(x,Y)，则$PA^2=x^2+(y-r)^2=2y+(y-r)^2$

设$f(y)=2y+(y-r)^2$,其图像对称轴为y=r-1,且0<y≤20，由题意得，y=0时取最小值，所以0<r<1。

也有（温州模拟考）1.抛物线$y^2=2px$内有一个圆,当圆的半径r如何取值时,球能到达抛物线底部?...

推广1，如果酒杯的轴截面是椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（a>b>0）在杯内放一个玻璃球，要使球触及酒杯底部，那么玻璃球的半径r应满足什么条件?

思路与上题类似，我们容易得到，r∈（0，$\frac{b^2}{a}$]

通过知识联系，我们还可以得到将抛物线酒杯换成双曲线的话，有怎样的问题？学生立即得到类似问题

推广2，酒杯的轴截面是双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（a>0，b>0），在杯内放一个玻

璃球，要使球触及酒杯底部，那么玻璃球的半径r应满足：r∈（0，$\frac{b^2}{a}$]

圆锥曲线问题，都是姐妹题目，我们通过内引外联，提供所需模型，可以较好培养学生数学抽象能力。

课后引申：已知圆O：$x^2+y^2-2x=0$及抛物线C:y=4x，过F(1,0)作倾斜角为α的直线l,l与抛物线及圆由上至下交于A,B,C,D四点，问当α为何值时，AB+CD有最小值?最小值为多少?

（当且仅当α=—时，即AD为抛物线通径时，等号成立AB+CD有最小值2.）

结语

2014年，教育部印发《关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》，要求各个教育部门把对学生德智体美全面发展总体要求和社会主义核心价值观的有关内容细化，制定学生核心素养体系。2015年11月，王尚志教授指出阐述了课程修订背景，他回忆了课程修订历程，1962年的大纲提出了运算、空间想象、逻辑推理三大能力；21世纪初大纲发展为抽象概括、逻辑推理、空间想象、运算求解、数据处理五大能力。纵观社会发展，他认为数学建模是短板。数学建模能够培养孩子体验数学最为真实的一面，所以我们从普洛克拉斯轨迹问题着手，从苏教版教材问题联想到实际生活问题，强调数学建模从生活现象到物理常识再到数学问题，学生较为深刻地体验了数学问题的发生发展，强调以生为本的课堂，以数学体验为根本，培养学生数学建模、直观想象、逻辑推理、数据分析和数学抽象核心素养。从数学文化高度引导整节课，学生处于比较活跃状态，参与的师生收获颇丰。

参考文献

[1]葛晓光.酒杯中的数学问题[J].数学教学通讯:中教版，2006(8):2.

[2]樊宏标,王庆丰.一道数学历史名题引出的研究性学习[J].数学通报，2010.

[3]高丰平.由沉到酒杯底部的球谈一类抛物线与圆的相关问题[J].中学数学月刊，2013(3):2.

[4]郑毓信.从“数学文化”到“数学核心素养”[J].江苏教育:小学教学版，2017(7).