数学归纳法及其在中学数学中的应用

吴佳梅

广西梧州商贸学校

摘　要：数学归纳法在数学解题中扮演着重要的角色，它不但在中学数学的学习中起着很大的作用，而且在公式的正确性检验中也有着巨大的帮助。如对于自然数集的有关命题、整除、恒等式、公理证明、排列和组合、几何领域等都有着非常广泛的应用。本文主要通过结合中学教材来详细列举数学归纳法在中学数学中的应用。

关键词：归纳法；数学；中学数学；证明

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2023.09.138

一、绪论

1.问题的提出

学生在中学阶段学习数学归纳法，主要是通过了解数学归纳法的证明三步骤来模仿证明其他表达式的成立。学生往往习惯于既定的命题，即“当k时命题成立，那么$k+1$时命题也成立”的思维方式。但是在学习掌握数学归纳法的过程中，却不是那么简单直观易懂，运用数学归纳法证明表达式其三步骤是不是真的完整呢？$p_{(k)}$真只是我们事先的假设，如果不真，用它去推真岂不就是“无中生有”？就算真能推出$p_{(k+1)}$真，但能确保$p_{(k)}$真吗？数学归纳法只能检验等式的正确性但是不能进行展示求解过程，可见数学归纳法也有着其自身的局限性和适用范围。那么在证明等式恒成立的过程中数学归纳法究竟扮演着一个怎样的角色呢？

数学归纳法在中学数学中的应用研究论文中，一般只是简单举例说明数学归纳法在一些问题中的应用，却没有进行深入分析和总结。针对这个情况，本文对数学归纳法在中学数学中的一些应用进行了一些探讨，从数学归纳法的实质和基本形式出发，得出了一些数学归纳法的解题技巧，对进一步学习和研究数学归纳法有一定的学习意义。

2.数学归纳法

1）数学归纳法的基本原理

数学归纳法是中学数学中一种常用的论证方法。其基本形式如下：

第一数学归纳法：设$P(n)$是一个与正整数n有关的命题。如果

（1）验证当n取第一个值时，命题成立；

（2）由假设$n=k$时命题成立，必可推得当$n=k+1$时该命题也成立，那么这个命题对一切正整数n都成立。

第二数学归纳法：设$P(n)$是一个与正整n数有关的命题。如果

（1）验证当n取第一个值时，命题成立；

（2）由假设$n\le k$时命题成立；必可推得当$n=k+1$时该命题也成立，那么这个命题对一切正整数n都成立。

例1.2.1：证明：前n个自然数的立方和$s_3(n)=1^3+2^3+3^3+......+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$成立。

分析：证明两个表达式恒等，根据数学归纳法的三个步骤，可快速得证。

证明：1. $s_3(1)=1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$

2、假设$s_3(n)=1^3+2^3+3^3+......+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$成立，则

3、$s_3(n+1)=1^3+2^3+3^3+......+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

以上命题证明完毕。

2）数学归纳法的其他形式

数学归纳法原理本质上来看由两个重要步骤构成，首先是奠基步，这往往比较容易，但却是必不可少的。概括起来有两个方面：一是奠基点的前提或后推，增多或减少；二是递推跨度和递推途径的变化，而正是因为是变着的多样性和应用技巧的灵活性，才使数学归纳法得到广泛的应用。

当n不一定从1开始，即：如果当$n=k_0$的时候，这个命题是正确的，又从假设当$n=k(k\ge k_0)$时，这个命题是正确的，可以推出当$n=k+1$时，这个命题也是正确的，那么这个命题$n\ge k_0$时都正确。

例1.2.2：设$n\ge 2$，求证：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$。

分析：本题要求证明一个表达式的和大于一个数值，根据所学知识，容易想到，这种问题可以用到相减法，相除法，缩放法等。当尝试求解时，就会发现，用相减法时，只能把具体数代进等式才能与0比较大小，且必须证明前面的表达式是增函数，才能保证在n取值范围内不等式成立，显得麻烦且颇为牵强。运用相除法，通分后无法整理成与1能比较大小的式子，无法求解。运用缩放法，由于不等式左边是由独立的式子组成，且n可变，不能与具体值比较大小，此法也行不

通。不过，这道题目要是用上归纳法，那就不一样了，假设n=k成立，那么只需证明n=k+1比前一项大即可，体现归纳法的优越性，且理由充分过程严谨，如下所示。

例1.2.2：求证：设是$n\geq 2$的自然数，求证：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$.

证明：1、当n＝2时，$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$.命题成立.

2、假设当n＝ k时，命题成立，则

3、当n＝k+1时，$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{k+1+1}+\frac{1}{k+1+2}+\cdots\frac{1}{k+1+k+1}$ ＝（$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}$）＋（$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$）＝（$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}$）＋（$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$），由归纳假设知$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$，而$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0$，所以$\frac{1}{k+1+1}+\frac{1}{k+1+2}+\cdots\frac{1}{k+1+k+1}>\frac{13}{24}$，即当n＝k＋1时，命题成立，所以对于任何大于1的自然数命题都成立.

在学习数学归纳中，掌握使用假设n=k时命题的结论，从而推出n=k+1时命题的结果，证明题设的正确性。在证明的过程中我们会发现，对比于第三步的证明步骤，前面两步的步骤往往显得略为简单，难免有种拿来主义之嫌。所以，在证明命题时，我们通常在第三步觉得异常痛苦。在经过一段时间的学习后，或许能准确无误的把题目解出来，却在脑海里没有弄清楚为何要按照这种照搬的模式来解题，甚至每一步的意义究竟何在，特别是第一步，就是显然得出的结论，为什么还要强加在解题的最前面？这第一步的作用是什么，为什么不能去掉？在最后用n=k的假设结论去推出n=k+1的必要性又是什么？

以上困扰着我们学习数学归纳法的种种问题，也正是数学归纳法的原理最本质的东西，也正是这种方法得以在数学领域里广泛应用的原因。

二、数学归纳法在中学数学解题中的应用

1.解决整除问题

运用数学归纳法来解决整除问题，需要充分运用整除的性质，即：f能被h整除，g能被h整除，则$(f+g)$能被h整除。

例2.1.1：求证：对于整数n≥0下面的式子能被133整除；

$$11^{n+2}+12^{2n+1}$$

分析：本题要求证明一个表达式能被一个数整除，最直接的方法就是用式子对要求证明的数做除法，只要能证明商是整数即可。不过，细心一想就会发现，n在变化着，我们并不能妄下结论式子能整除，n的取值有无穷个，并不能一一代值进去求解。根据中学知识，也只有数学归纳法能解决此类问题。通过假设n=k时整式成立，当n=k+1时，通过一定巧妙的变化，变化成假设的表达式，包含着除数的因子表达式，那么问题得证。

2.证明恒等式

例2.2.1：$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

分析：对于此类题目，大部分人都会想到利用单边往另一边的形式进行等量变换，或者两边同时往一个中间的表达式变换即可。不过无论怎么变，最后都会发现，这种方法是行不通的，首先，单是利用一边运算，表达式没有什么共同的地方，不能提取公因式，其次，对于理想状态的中间表达式，就算存在，也不好把握要变到哪种形式。要是考虑到数学归纳法，则省去了这些麻烦。假设n=k成立后，只需看清楚n=k+1后式子具体增加了多少项，把单边表达式通过等量变换成假设成立的形式，则问题得证，这比起前面的方法来得简单直接，且条理清晰。如下过程：

证明：1）$n=1$时，左$=1$，右$=\frac{1}{6}\times(1+1)(1+2)=1$，左＝右，$n=1$时命题成立

2）假设$n=k$时，等式成立。

3）则当$n=k+1$时，左$=1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$，右$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$，

即左＝右，则有$n=k+1$时，等式也成立。

3.数列中的等式问题

例2.3.1 已知$\{a_n\}$是以首项为a_1，公差为d的等差数列，证明数列的第n项为$a_n=a_1+(n-1)d$。

分析：对于这类简单的求通项公式的问题，方法是多种多样的，这里通常的做法是利用相减法，把中间的数值都消去，剩下a_1和a_n，可直接求出通项公式，只是这个方法显得过于雍长，要是用上归纳法，则可以快速得以证明，且条理清晰，如下。

证明：1）当$n=1$的时候，$a_1=a_1$等式是成立的。

2）假设$n=k$时候，$a_k=a_1+(k-1)d$成立。

3）则当$n=k+1$时，有$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd$

则当$n=k+1$时，等式也成立。

例2.3.2：证明：首项为a_1，公差为d的等差数列前n项的和，可以用公式$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$表示。

分析：此题目是上一道题目的延伸，有了a_n的通项公式，用上归纳法那也是水到渠成的事。比单纯的计算省略很多篇幅。如下：

证明：1）当$n=1$的时候，$S_1=a_1$等式成立。

2）假设$n=k$，$S_k=ka_1+\frac{1}{2}k(k-1)d$成立。

3）则当$n=k+1$时，有$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=ka_1+\frac{1}{2}k$

$(k-1)d+a_1+kd=(k+1)a_1+\frac{1}{2}kd(k-1+2)=(k+1)d+\frac{1}{2}$

$(k+1)kd$

则$n=k+1$时等式也是成立的，所以等式在正自然数都是成立的。

4.运用数学归纳法证明等比数列的通项公式

例2.4.1：数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$是自然数，运用数学归纳法证明等式：$a_n=\frac{(n-1)-(n-2)a_1}{n-(n-1)a_1}$，（n≥2）成立。

分析：本题要求证明的是一个通项公式，看到题目，脑海中马上就要想到求一道题目的通项公式的各种方法，包括公式法，累加法，待定系数法等。可是稍加思考，要是再进一步做题时这些方根本行不通，题目本来就是要求表达式，无法用公式去应用推导过程，累加法只能表达前n个自然数的立方和的具体数字，用待定系数法时，由于没有任何具体两项的相关表示式，待定系数也就是个不确定值。

由于以上方法都行不同，这时就可以考虑到归纳法这一数学方法，仔细查看题目，就会发现，只要假设n=k公式成立，那么当n=k+1时，能利用假设推导出题目要求的结论，则题目得证。这也恰好利用了数学归纳法的三个步骤，以保证证明足够的严谨，证明过程如下。

1）当$n=2$时，$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{(2-1)-(2-2)a_1}{2-(2-1)a_1}$等式成立。

2）假设当$n=k$时，等式$a_k=\frac{(k-1)-(k-2)a_1}{k-(k-1)a_1}$成立，则

3）当$n=k+1$时，则有$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{(k-1)-(k-2)a_1}{k-(k-1)a_1}}$

$$=\frac{1}{\frac{2k-2(k+1)a_1-(k+1)+(k-2)a_1}{k-(k-1)a_1}}=\frac{k-(k-1)a_1}{(k+1)-ka_1}$$

则当$n=k+1$时，等式也成立，由此可知：$a_n=\frac{(n-1)-(n-2)a_1}{n-(n-1)a_1}$，命题得证。

三、结论

由以上可知，数学归纳法在中学数学中有着广泛的应用，深刻影响着数学的发展方向，这个方法探讨的主要是在无限自然数集里面一些恒等式及其相关命题推论与证明。数学归纳法的完整步骤必须包括三个步骤，并且相互关联不可或缺，要是缺少了其中任何一个步骤，都不是完整的证明过程。数学归纳法既然是一种中学常用的数学方法，有着很大的必然性，它将无限化为有限，在这方面完全体现了数学思维的缜密性和逻辑性。如，$n=k$时的假设是第三步证明的，证明时可以作为结论来采用，且一定要用上，除此之外就不是完整的数学归纳法。在证明$n=k+1$时命题成立，通常要用到一些技巧，一般的思维方式是：凑出假设，变化成结论，加减项、拆项、不等式的缩放、等价转化等。总而言之，牢记“递推基础要扎牢，归纳假设不可少，结论写时勿遗漏”，只有这样才可以灵活的运用数学归纳法，其作为一种重要的数学方法，同时也是中学数学来说，也是重难点之一。它对于开阔学生眼界，训练推理能力等方面有着深远的影响。在中学数学中，数学归纳法对于许多重要的结论，如等差数列通项公式，等比数列前n项和，二项公式定理等都可以用数学归纳法进行证明，加深对教以及整个数学体系的理解.当然不仅在中学数学中，在进一步学习高等数学的过程中，数学归纳法将发挥着更为重要的作用。

参考文献

[1]华罗庚.数学归纳法[M].北京：科学出版社，2002.

[2]黄忠裕.中学数学思想方法专题选讲[C].成都：四川大学出版社，2006：71-84.

[3]唐子周.关于数学归纳法的一点探索[J].中国科技信息，2008（03）：238-239.

[4]张莉，贺贤孝.数学归纳法的历史[J].辽宁师范大学学报（自然科学版），1999（02）：102-106.

[5]黄崇智.第一及第二数学归纳原理的推广[J].内江师范学院学报，2008（10）：11-12.

[6]苏淳.漫话数学归纳法[M].合肥：中国科学技术大学出版社，2001.

[7]吴宪芳，郭熙汉.数学教育学[M].武汉：华中师范大学出版社，1996：56-57.

[8]钱珮玲.数学思想方法与中学数学[M].北京师范大学出版社，1999.

[9]Mathematical induction[M].Cambridge University Press，1999.

[10]Mathematical induction[M].Houghton Mifflin，2002.

[11]（美）索明斯基撰，高彻译.数学归纳法[M].上海：中国青年出版社，1953.

[12]（俄）杰朴曼.吕学礼译.数学归纳法[M].北京：人们教育出版社，1959.