挖掘试题情境，突破面积比值
——以2023年云南省中考题为例

杨鹏
昆明市第一中学西山学校

摘　要：2023年云南省中考题第23题是一道以圆为背景，中点和角平分线作为条件求三角形面积比值的几何综合题，本文从4个不同视角度，给出多种解题方法，进而归纳出蕴含的基本几何模型及处理面积比值问题的一般思路，并对中点和角平分线模型进行教学思考，最后对初中几何的教学提出相应的建议。

关键词：中点；角平分线；面积比值；相似；基本图形；一题多解
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2024.03.014

引言

《义务教育数学课程标准（2022年版）》提出，初中学业水平考试命题要“坚持素养立意，凸显育人导向”[1].好的试题不仅体现新课程理念下命题原则与考试目的，更蕴含着命题者的教学经验与育人智慧。在中点和角平分线作为条件下求解面积比值有关的几何计算问题是历年中考的热点问题，这类问题综合性强，属于中考压轴题。解决这一类问题的核心在于充分挖掘基本图形，巧添有效的辅助线，将复杂的几何问题转化为基本图形.为了培养学生的几何直观与逻辑推理能力，同时提升教师自身专业素养，一定要深刻挖掘题目出题意图，追根溯源探究多种解法，思考每种解法背后的本质，做到一题多解，多解归一。目前，单独对中点模型、角平分线模型、面积比值问题的研究已有很多，但把三个知识综合呈现在一道题中的情况不多，恰好2023年云南省中考题第23题就包括了这三个知识，引起了笔者的兴趣对其进行多解探究与思考，供大家共同研讨.

一、试题呈现

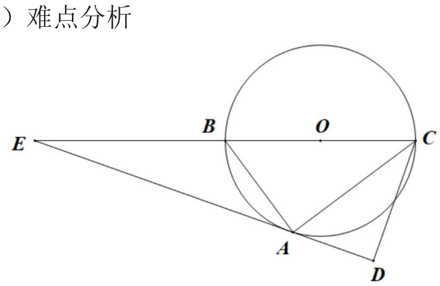
（2023年云南省中考题第23题）如图，BC是⊙O的直径，A是⊙O上异于B、C的点.⊙O外的点E在射线CB上，直线EA与CD垂直，垂足为D，且DA·AC=DC·AB.设△ABE的面积为S_1，△ACD的面积为S_2.

（1）判断直线EA与⊙O的位置关系，并证明你的结论；

（2）若BC=BE，$S_2=mS_1$，求常数m的值.

二、破题思路

（一）难点分析



学生在寻求第2问的解题思路时，笔者预设会遇到以下困难：

（1）如何建立条件BC=BE与面积S_2与S_1的比值关系？

（2）处理S_2与S_1的比值应该采用哪种方法？有没有直接计算出两个面积的可能性？能否结合图中的相似三角形利用相似三角形的性质来处理面积比值？

（3）是否需要添加必要的辅助线？是作垂线？还是平行线？还是什么样的辅助线才有效？

（4）两个三角形的底和高是否存在特殊关系？能否用等积变换法来转化？

（5）是严格用几何演绎推理证明还是可以结合代数计算推理证明？

（二）从试题情境挖掘解题线索

由于本题蕴含相似三角形、中点、和角平分线这些基本几何结构图形，所以充分挖掘两个三角形底和高的关系，挖掘中点和角平分线相关模型，巧妙利用相似三角形的关系来处理两个三角形的面值关系是本题的突破口，因此本题也蕴含着多个解题视角，多种解题方法.

三、多个视角，一题多解

第（1）问由DA·AC=DC·AB可得$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$，则AC平分∠ECD，结合OA=OC易证OA⊥EA，所以EA为⊙O切线.

下面仅对第（2）问进行多个视角分析，一题多解探究.

（一）视角一：通过分析底与高比值得到面积比值

解法1：

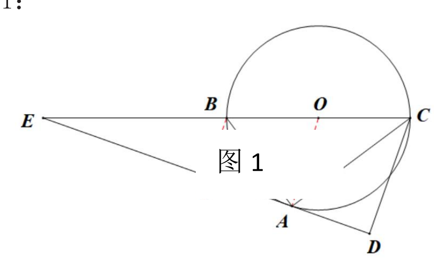


图 1

如图1，作BF⊥EA于点F，又∵CD⊥EA，

∴BF∥CD，又∵BC=BE，

$$\therefore \frac{BF}{CD}=\frac{BE}{EC}=\frac{1}{2}\text{即}\frac{CD}{BF}=2$$

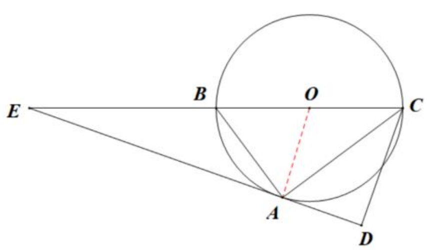
同理由（1）OA⊥EA可得OA∥CD，

$$\therefore \frac{AE}{AD}=\frac{EO}{OC}=\frac{3}{1}\text{即}\frac{AD}{AE}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABE}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot CD}{\frac{1}{2}AE\cdot BF}=\frac{AD}{AE}\cdot\frac{CD}{BF}=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$$ 即 $m=\frac{2}{3}$.

解法点评　本解法为昆明日报提供的标准答案所采用的方法.通过作△ABE的高BF，由平行线分线段成比例得到两个三角形的底之比及高之比，从而求出两个三角形面积之比.此法的关键点在于从问题出发，抓住三角形面积公式的核心：底与高的比值决定了三角形的面积比值，而平行线恰好建立了底与高之间的比例关系.

解法2：（中线平分面积及等积变换）



如图2，由（1）OA⊥EA可得OA∥CD，

$$\therefore \frac{AE}{AD}=\frac{EO}{OC}=\frac{3}{1},$$

由△ACE和△ACD高相等可得 $S_{\Delta ACE}:S_{\Delta ACD}=AE:AD=3:1$，

同理由B为EC中点可得 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ACE}$，

则 $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}S_{\Delta ACE}:S_{\Delta ACD}=\frac{3}{2}:1$，即 $S_1:S_2=3:2$，

$\therefore S_2=\frac{2}{3}S_1$，则 $m=\frac{2}{3}$.

解法点评　此法与解法一类似从问题出发直接分析两个三角形面积比值关系，但巧妙地运用了等积变换，通过高相等时面积之比等于底之比得到 $S_{\Delta ACE}:S_{\Delta ACD}=3:1$，再由中线平分面积推出 $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta ACD}=3:2$.此法的关键在于利用等积变换解决三角形面积比值问题.

（二）视角二：利用相似性质转化

解法3：（切割线定理，母子型相似）

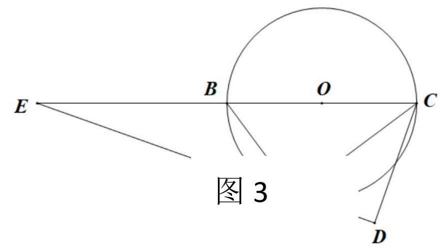


图 3

如图3，∵B为EC中点，∴ $S_{\Delta EBA}:S_{\Delta EAC}=1:2$，

由（1）得EA为⊙O切线，

由切割线定理可证△EBA∽△EAC，则 $\frac{AB}{AC}=\sqrt{\frac{S_{\Delta EBA}}{S_{\Delta EAC}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

∴设AB=a，AC=$\sqrt{2}a$，则由勾股定理得BC=$\sqrt{3}a$，

由（1）已证∽可得

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABE}}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}}=(\frac{AC}{BC})^2=(\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a})^2=(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2=\frac{2}{3}$$

，即 $m=\frac{2}{3}$.

解法点评　此法充分利用第一问已证的两个结论，由EA为切线想到切割线定理得到△EBA∽△EAC（母子型相似）得出AB与AC比例，进而得到AC与BC比例（即ΔABC与ΔDAC的对应边之比），再由$\Delta ABC\backsim\Delta DAC$利用相似三角形面积之比等于相似比的平方得到$S_2$与$S_1$的比值.此法说明在解决相似三角形面积之比时可转化为相似比的平方处理.

解法4：（K字型相似或射影相似）

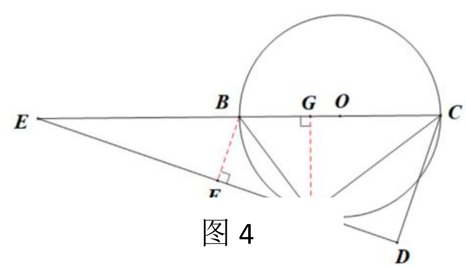


图 4

如图4，∵BC为⊙O直径，∴∠BAC=90°，

由K字型相似易证△ABF∽△CAD，

则 $\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta ACD}}=(\frac{BA}{AC})^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}$，

由解法6已证　$S_{\Delta ABF}=S_{\Delta ABG}=S_1-S_2$

∴可得 $\frac{S_1-S_2}{S_2}=\frac{1}{2}$

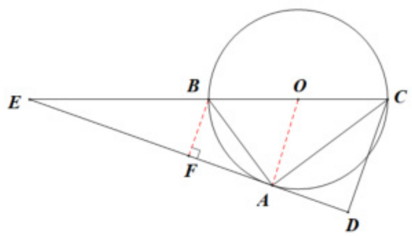
解得 $S_2=\frac{2}{3}S_1$，即 $m=\frac{2}{3}$.

注：本解法也可由射影相似证△ABG∽△CBA，可得：$\frac{S_1-S_2}{S_1}=(\frac{AB}{BC})^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2=\frac{1}{3}$，也可得到相同结论.

解法点评　此法以∠BAC=90°为突破口，构造出两种与90°有关的相似模型：K字型相似或射影相似，使得AB与AC比例或AB与BC比例成为相似比，得到S_1和S_2的方程，从而解出S_2和S_1的比值.

（三）视角三：设参处理，代数计算推理

解法5：（引参设半径计算出底和高表示面积）



如图5，作BF⊥EA于点F，设⊙O半径为r，

则OA=OB=OC=r，BC=EB=2r，EO=3r，EC=4r，

由勾股定理得EA=$2\sqrt{2}r$，

由OA//CD可得△EOA∽△ECD$\Rightarrow \frac{OA}{CD}=\frac{EO}{EC}=\frac{3r}{4r}=\frac{3}{4}$，

∴CD=$\frac{4}{3}OA=\frac{4}{3}r$，由勾股定理得ED=$\frac{8\sqrt{2}}{3}r$，

则AD=ED−AE=$\frac{2\sqrt{2}}{3}r$，

又∵BF//OA，∴△EBF∽△EOA$\Rightarrow \frac{BF}{OA}=\frac{EB}{EO}=\frac{2r}{3r}=\frac{2}{3}$，

∴BF=$\frac{2}{3}OA=\frac{2}{3}r$，

$\because S_1=S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}EA\cdot BF=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}r\cdot\frac{2}{3}r=\frac{2\sqrt{2}}{3}r^2$，

且$S_2=S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}r\cdot\frac{4}{3}r=\frac{4\sqrt{2}}{9}r^2$，

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABE}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}r^2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}r^2}=\frac{2}{3}$，即$m=\frac{2}{3}$.

解法点评　此法采用设半径为r，设而不求的方法结合平行线相似模型用r表示出两个三角形的底和高，通过计算的方法最后用r表示出两个三角形面积，进而得到面积比值.可以发现，通过设半径结合计算用代数式表示出面积是解决面积比值的一种有效方法.

解法6：（设半径r结合平行A字型相似列方程）

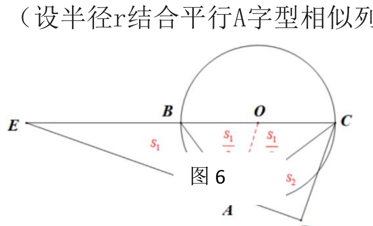


图 6

如图6，由O为BC中点可得

$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}\times S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}S_1$，

$\therefore S_{\Delta EOA}=S_{\Delta ABE}+S_{\Delta AOB}=S_1+\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_1$，

$S_{\Delta ECD}=S_{\Delta ABE}+S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=S_1+S_1+S_2=2S_1+S_2$，

由解法4可得△EOA∽△ECD，

则$\frac{S_{\Delta EOA}}{S_{\Delta ECD}}=(\frac{EO}{EC})^2=(\frac{3r}{4r})^2=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$，

即$\frac{\frac{3S_1}{2}}{2S_1+S_2}=\frac{9}{16}$，解得$S_2=\frac{2}{3}S_1$，即$m=\frac{2}{3}$.

解法点评　此法通过中线平分面积和平行A字型得到△EOA∽△ECD，巧妙地用S_1和S_2表示△EOA和△ECD面积，利用相似三角形面积之比等于相似比平方列出关于S_1和S_2的方程，从而解出S_2和S_1的比值，善于发现典型相似几何模型结合方程思想也可以处理面积比值问题.

（四）视角四：巧妙添加辅助线，结合等积变换

解法7：（角平分线作双垂线和A字型相似或等积变换）

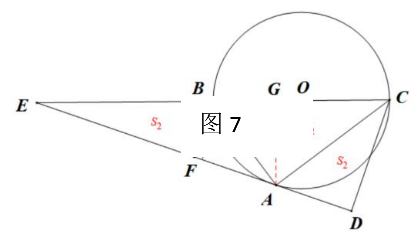


图 7

如图7，作BF⊥EA于点F，AG⊥EC于点G，

由AC平分∠ECD易得△ACG≌△ACD，

则$S_{\Delta ACG}=S_{\Delta ACD}=S_2\Rightarrow S_{\Delta ABG}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ACG}=S_1-S_2$

同理易证$S_{\Delta ABF}=S_{\Delta ABG}=S_1-S_2$，

$\therefore S_{\Delta BEF}=S_{\Delta ABE}-S_{\Delta ABF}=S_1-(S_1-S_2)=S_2$，

∵BF//CD，∴△EBF∽△ECD，

可得$\frac{S_{\Delta EBF}}{S_{\Delta ECD}}=(\frac{EB}{EC})^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，即$\frac{S_2}{2S_1+S_2}=\frac{1}{4}$，

解得$S_2=\frac{2}{3}S_1$，即$m=\frac{2}{3}$.

注：此法也可用等积变换把S_2和S_1的比转换为底BC与CD之比更简单：

由角平分线性质可得AG=AD，且解法5已计算出BC=2r，CD=$\frac{4}{3}r$

可得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BC}{CD}=\frac{2r}{\frac{4}{3}r}=\frac{3}{2}$，即$S_2=\frac{2}{3}S_1$，$\therefore m=\frac{2}{3}$.

解法点评　此法充分利用角平分线作双垂线，由角平分线的性质得到两对三角形全等，即△ACG≌△ACD和

$\triangle ABF \cong \triangle ABG$，然后用$S_1$和$S_2$表示$\triangle EBF$和$\triangle ECD$面积，与解法5类似用相似三角形面积之比等于相似比平方列出关于S_1和S_2的方程，从而解出S_2和S_1的比值，或者通过等积变换把S_2和S_1的比转换为底BC与CD之比.本解法说明围绕角平分线这一重要条件作垂线构造全等是一种有效的辅助线，能够把研究的面积进行代换，挖掘出有效的面积之间的等量关系.

解法8：（补形构造出矩形模型）

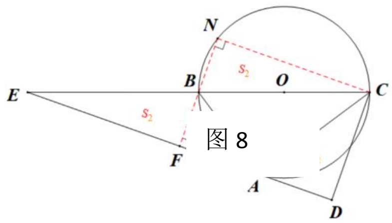


图 8

如图8，过点B作ED垂线交ED于F，交⊙O于点N，

连接CN，则易得四边形CDFN为矩形，

易证$\triangle CBN \cong \triangle EBF$，则BN=BF，

$\therefore \frac{BN}{CD}=\frac{BN}{NF}=\frac{1}{2}$，

易证$\triangle CBN \backsim \triangle ECD$，可得$\frac{S_{\triangle CBN}}{S_{\triangle ECD}}=(\frac{BN}{CD})^2 ==(\frac{1}{2})^2 \ =\frac{1}{4}$

即$\frac{S_2}{2S_1+S_2}=\frac{1}{4}$，解得$S_2=\frac{2}{3}S_1$，$\therefore m=\frac{2}{3}$.

$\because S_{CDFN}=S_{\triangle ECD}=2S_1+S_2$，且易证A为FD中点，

$\therefore$由$S_{CDFN}=4S_{\triangle ACD}$可得$2S_1+S_2=4S_2$，解得$S_2=\frac{2}{3}S_1$

，$\therefore m=\frac{2}{3}$.

解法点评　此法的辅助线构造出矩形CDFN，然后出现了矩形模型和倍长中线的8字型全等两个基本图形，之后可由$\triangle CBN \backsim \triangle ECD$或者$\triangle ABF \backsim \triangle CAD$利用相似知识求解，也可由面积之间的等积变换解决；此法蕴含了补形构造基本图形和相似模型的数学思想.

四、解后反思，教学导向

（一）解决面积比值问题一般解题思路

寻找相似三角形，把面积比值转化为相似比的平方；

直接从底和高入手，要么直接计算表示面积，要么由底与高的比值得到面积比值；

善于发现面积等底或等高的情况，巧妙运用等积变换；

合理添加辅助线，构造出基本几何图形；

充分抓住重点条件比如中点与角平分线，挖掘图形中蕴含的特殊关系，譬如全等、相似、等腰、平行、垂直等.

（二）关于初中几何的教学建议

（1）一题多解，多解归一，思考试题本质

在几何教学里，笔者认为教师作为一个引导者，更应该引导学生队一道题做到一题多解，再多解归一，并且学会如何想，学会思考解决题目方法的本质.教师可引导学生对题目执果索因，为什么要做这种辅助线？做这种辅助线是为了构造出哪个基本图形结构？解决这个问题应该如何转化？转化的本质是为了运用哪个基础知识？学生只有了解题目的命题意图以及解题的方法本质，才能真正理解题目中涉及的基本知识，掌握解决这一类题目的一般方法。

（2）建立模型思想，重视基础图形结构的教学

从本文研究的这道中考题的8种解法中，不难发现原题和解法中涉及线段中点性质、角平分线性质、圆的性质、平行、全等、相似等基本知识；涉及作垂线，引参计算、等积变换等方法.它们都是由基础知识和基本图形经过变换、组合、转化而形成的.由此，在平时的教学中，教师需要重视基础知识和基础图形结构的教学，这样有利于学生快速找到解题的突破口，从而培养学生的几何直观.教师应该重点研究“质同形异”的题目，以专题训练的形式探求“递进式求解”，感受问题的深层结构[2]。

结语

《义务教育数学课程标准（2022年版）》要求发展学生“三会”的眼光，在分析问题的同时，会用数学的思维思考现实世界。初中阶段数学核心知识可以实现对学生核心素养的提升。教师在几何综合题的教学中，要尽可能地发散思维，给学生留够思考的时间。对题目进行深度解读，培养学生由因导果，从题中的条件联想到不同的辅助线作法，进而得到不同的解题思路，解完题后，要引导学生总结回顾不同解法的异同点，尝试总结不同条件下各种方法的优劣性，使学生从变中发现不变，对多种方法融会贯通。同时，教师应有意识地向学生渗透转化、模型、类比、化归等思想方法，以培养学生的思维能力。

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准（2022年版）[S].北京：北京师范大学出版社，2022：7

[2]识别基本结构，突破思维节点[J].数学之友，2022（23）：79-80.

作者简介：杨鹏（1988—），男，汉族，云南昆明人，研究生，昆明市第一中学西山学校，一级教师，研究方向：初中数学教学。