# 正确理解数学符号 发挥数学育人价值
## ——以“主元分析法”为例

郝翠萍
东华大学附属实验学校

**摘　要：** 方程、不等式、函数是初中数学学习的重要内容。在平时的教与学过程中，我发现，在方程和不等式范畴里，字母x、y、z是未知数，在函数范畴里，字母x是自变量，这种固化思维在学生层面根深蒂固，学生缺乏对数学符号，数学关系和函数概念的深刻感知与深入理解。本文通过对试题的归纳总结，以主元分析的解题策略为载体，依据过程性评价，设置合理教学问题，发挥数学育人价值，达到激活学生思维、引导学生思考、培养核心素养的效果。

**关键词：** 数学符号；主元分析法；核心素养；育人价值
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2024.04.083

《义务教育数学课程标准》（2022年版）（以下简称《课程标准》）指出：数学的核心素养主要包括：会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界[1]。“三会”高度概括了数学课程的育人价值，所以发展核心素养是数学育人的目标与途径。学生的数学核心素养具有阶段性、连续性和整合性，在学习的过程中通过聚焦对重要数学概念、定理、方法、思想的理解和应用，落实基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，培养发现、提出、分析和解决问题的能力。

主元分析法是在正确理解数学符号的基础上，运用方程思想和函数思想解题的重要策略，其基本思路是：根据具体条件和解题需求，在众多参量和变量（统称符号）中选取合适符号作为主元，通过研究主元的相关性质达到解决问题的目的。

### 一、在典型错误中探究原因

例1　已知关于x、y的方程组$\begin{cases} x-y=2k \\ x+3y=1-5k \end{cases}$的解满足不等式-1≤x+y＜5，求实数k的取值范围是

此题是本校六年级某次测试的题目，测试结果显示60%左右的学生完全没有思路，对含参数方程比较陌生；25%左右的学生对这个二元一次方程组进行消元，但是消元目标不明确，一会儿消x，一会儿消y，一会儿又消k，思路混乱；还有15%的学生通过题目的特殊性解决了问题，但对于含参数方程的一般解决策略比较生疏。

为此，课下我参访了一些学生（各个层次的学生各挑了一位）。有学生认为，这个方程组的字母过多，有x，y还有k，无从下笔；有学生认为，由于k的不确定，导致这个二元一次方程组无法解出来；还有的学生考场上一通乱“消元”，莫名其妙的做了出来，现在回想起来已经忘记了当时是怎么消元的；还有的学生是这样做的：

$\begin{cases} x-y=2k① \\ x+3y=1-5k② \end{cases}$由①+②得，2x+2y=1-3k，即$x+y=\frac{1-3k}{2}$

由已知得，$-1\le\frac{1-3k}{2}<5$.解之得，-3＜k≤1

这位同学的解答非常巧妙，利用①+②，得到x+y的表达式，根据已知条件，迅速得到字母k的取值范围，非常棒！那么问题来了，如果我将原题中的二元一次方程组改成$\begin{cases} 2x-y=2k \\ x+3y=1-5k \end{cases}$，其他条件不变，还能求出k的取值范围吗？同学们陷入了沉思中……

经过更改，例1中题目的特殊性被更改，即通过①与②的和、差、倍“将x+y用含有k的代数式来表达”没那么容易，问题搁浅。那么有没有不依赖于原题的特殊性的一般方法呢？我以原题为例进行解答。

解析将方程组$\begin{cases} x-y=2k \\ x+3y=1-5k \end{cases}$看成关于x、y的二元一次方程，k看作已知数（参数），利用加减消元法或者代入消元法可解得，$\begin{cases} x=\frac{k+1}{4} \\ y=\frac{1-7k}{4} \end{cases}$则$x+y=\frac{1-3k}{2}$,

代入已知条件-1≤x+y＜5得，$-1\le\frac{1-3k}{2}<5$.解之得，-3＜k≤1

【方法点睛】这种将原方程中的x、y看作未知数，k看作已知数（参数）的视角解决此类题目是不是易如反掌？这里的x、y是主元，k是已知数（参数、次元）

学习了例1的解题方法，我随即出了这样一道题：

例1变式已知关于x、y的方程组$\begin{cases}2x+y=m\\x+2=5m\end{cases}$的解满足$x+y=6$，求m的值。

由于例1的铺垫，此题出错率明显降低，我又追问还有没有不同的方法？学生沉默。我提示道，能不能把x、y、m看作未知数，将此方程看作关于x、y、m的三元一次方程组呢？有个别学生表示疑惑，m是表示已知数的字母，怎么能看作未知数？乍一听似乎情有可原，题目中说关于x、y的方程组，那么其他字母理应是已知数。那么，问题出在哪儿了呢？

一方面，在初中阶段学生接触的方程和函数解析式多数是以x、y表示的形式，其他字母均作为常数处理，久而久之就形成了固化思维——“方程中的x、y就是未知数”，“函数中的x就是自变量”等。另一方面，代数是研究符号之间的“关系”，而不是研究符号本身，以谁为“元”（未知数），以谁为“参数”（已知数），以谁为“次元”，甚至什么是数字，什么是字母……这是人类主观上的感觉，这并不重要，重要的是“关系”本身。小学阶段，学生的思维还停留在数和数量关系上，初中低段学生对“用字母表示数”还比较陌生，还不能深刻理解符号关系这一本质特征。

由此引发我深刻的思考：如何实施有效教学、优化评价体系、发挥育人价值、落实核心素养？在我的引导下，同学们尝试用新视角——把字母m看作未知数，开始解题：

由已知条件得$\begin{cases}2x+y-m=0\\x+2-5m=0\\x+y=6\end{cases}$解这个三元一次方程组得，$\begin{cases}x=-7\\y=13\\m=-1\end{cases}$

看到同学们脸上洋溢的笑容，我知道这个方法让他们对题目有了新视角、新体验。也让我对“教师如何帮助学生突破难点，获得成功的体验”有了一定的体会。

【方法点睛】代数是研究符号之间的“关系”，而不是研究符号本身。

**二、在类比练习中寻找方向**

数学家波利亚说：类比是一个伟大的引路人，是获得发现的源泉之一。为让学生更好的理解数学符号，揭示方法间的差异，消除学生对问题的恐惧心理，促成学生的深度学习，我设计了以下同类练习：

练习1. 已知关于x、y的方程组$\begin{cases}x-y=a+3 ①\\2x+y=5a ②\end{cases}$的解满足x＜y＜0，求a的取值范围。

解析把x、y看作主元，a看作参数，解得$\begin{cases}x=2a+1\\y=a-2\end{cases}$

由已知条件得，$2a+1<a-2<0$，即$\begin{cases}2a+1<a-2\\a-2<0\end{cases}$，解之得，$a<-3$

练习2. 已知a、b为定值，无论k为何值，关于x的方程$\frac{kx+a}{3}=1-\frac{2x+bk}{6}$的解总是x＝1，那么a+b=__________

解析把x=1代入方程得$\frac{k+a}{3}=1-\frac{2+bk}{6}$. 把k看作主元，整理得，$(2+b)k=4-2a$. 无论k取何值，此方程都有一个公共解，∴$\begin{cases}2+b=0\\4-2a=0\end{cases}$，解之得$\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$

∴a+b=0

练习3. 在关于x、y的二元一次方程$\frac{k+x}{3}=1-\frac{2+ky}{6}$中，当k每取一个值时，就得到一个方程，这些方程有一个公共解，这个公共解是__________

解析 把k看作主元，把x、y看作已知数，整理成关于k的方程得，$(2+y)k=4-2x$

无论k取何值，上式都成立，∴$\begin{cases}2+y=0\\4-2x=0\end{cases}$解之得$\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$∴这个公共解是$\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$

【方法点睛】练习2和练习3解题过程是一样的，教学过程中可进行类比学习，再一次加深对“符号的逻辑关系不会因为符号本身的改变而改变”这句话的理解。教学过程中引导学生正确理解数学符号，学会“用数学的语言表达现实世界”。

**三、在归纳总结中实践提高**

为了更好地利用主元分析法落实核心素养的培养，教师应创设不同情境，通过对解题过程和解题方法的反思，让学生经历解题思考与优化的过程，培养学生的辩证思维与理性精神[2]。

例2对任意m∈[-1, 1]，函数$f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$的值，恒大于零。求x的取值范围。

解析 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m=(x-2)m+x^2-4x+4$. 令$g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$, 由题意知，m∈[-1, 1]时，g(m)的值恒大于零。所以，x＜1或x＞3

【方法点睛】本题学生容易把它看成关于x的二次

函数，解答比较繁琐。换个视角，以m为变量，把x当参数，把它看成关于m的一次函数，因为直线图像简单，解答过程也简单。

例3 已知y≠0，$x^2-6xy-7y^2=0$. 求$\frac{y}{x}$的值。

解析 （方法一）把x当作主元，y当作次元.

（方法二）因为y≠0，方程两边同时除以$y^2$，

得$(\frac{x}{y})^2-6\left(\frac{x}{y}\right)-7=0$.

$\left(\frac{x}{y}-7\right)\left(\frac{x}{y}+1\right)=0$，解得，$\frac{x}{y}=7$或-1

【方法点睛】方法一很多学生能想到，方法二的解法更有意思。《楞严经》中，有这样一段比喻，真正的佛法就好像天上的月亮，佛用手指指着天上的月亮为我们讲佛法，而我们却固执的认为，佛的手指就是佛法，却不懂得用心去观察天上的月亮。一元二次方程大家都认识，因式分解，解方程，谁都会。但是都被“一元”“二次”这些文字描述所局限，这就好比只看佛祖的手，心里只有$x^2-6x-7=0$，而月亮是$*^2-6*-7=0$，*可以代表数字、字母等任何东西，这不影响对$*^2-6*-7=0$因式分解的逻辑。

例 4 设 $2021x^3=2022y^3=2023z^3$，$xyz>0$，$\sqrt[3]{2021x^2+2022y^2+2023z^2}=\sqrt[3]{2021}+\sqrt[3]{2022}+\sqrt[3]{2023}$. 求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

解析 设$2021x^3=2022y^3=2023z^3=k$，则$2021=\frac{k}{x^3}$，$2022=\frac{k}{y^3}$，$2023=\frac{k}{z^3}$，

代入$\sqrt[3]{2021x^2+2022y^2+2023z^2}=\sqrt[3]{2021}+\sqrt[3]{2022}+\sqrt[3]{2023}$

得 $\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}x^2+\frac{k}{y^3}y^2+\frac{k}{z^3}z^2}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}}$. 即 $\sqrt[3]{k}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\sqrt[3]{k}$.

解得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

【方法点睛】等比设k是很多学生的第一反应，但是很快发现，x、y、z三个字母很难表示，就算能表示，之后往已知的等式里代入字母，计算非常繁琐。这里把数字作为主元，另辟蹊径，达到了事半功倍的效果。为什么学生很难想出这种解题思路呢？因为学生更关注符号，而非关系。学生被书本上那些公式的表面形式限制了，以为这白纸黑字加粗的就是***公式了，就是数学了。学生只关注公式的外表形象，外表字母，没有透彻的理解公式本身所表达的逻辑，所以一旦表面写法变了，学生就认不出其本质未变，更谈不上能想出这种解题思路了。作为教师必须让学生明白，符号是桥，度过桥，桥的对面，就是符号之间的关系，它才是你的目标。要过河拆桥，不要总惦记桥。

**四、在反思总结中不断前行**

2001年的《实验稿课标》第一次明确提出了“符号感”，《2011年版课标》将“符号感”调整为“符号意识”，指出“建立符号意识有助于学生理解符号的使用是数学表达和进行数学思考的重要形式。”《2022版课标》对符号意识作了更明确的阐述，符号意识有两方面的含义：一是可以用符号进行运算和推理，二是知道用符号进行运算和推理得到的结果具有一般性[3]。

假如人类有另一套代数体系，a、b、c表示未知数，x、y、z表示参数，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$表示数字，1、2、3表示字母，虽然表象上的符号不同，但是表达的数学模型是一种，所以计算结果也是不矛盾的。这种视角解题好比对函数的自变量和因变量进行交换，对函数的坐标轴进行变换。虽然图像变了，但是不影响原本的结构关系。符号显然没有关系重要，比如高中的数学归纳法，n成立，n+1也成立，就是在体现关系的重要性。宋代大文豪苏轼在诗作《题西林壁》中写道“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，它用通俗的语言，写出了从不同视角，观察庐山后的不同形态。数学也是如此，只有正确理解数学符号背后的逻辑关系，你才能体会数学的美妙和强大。

解题教学必须遵循“从概念和定理出发思考和解决问题”，并不能简单等价于“题型+技巧”。虽然主元分析法只是一种解题策略和方法，但应该让学生以其为载体，思考“数与式”“方程与不等式”“函数”概念和问题的本质，正确理解数学符号，提高在特定情境中发现问题、分析问题、解决问题的能力；教师应该改变观念，注重过程评价，淡化解题结果，深挖题目内涵，培养学生的辩证思维和理性精神，落实数学的育人价值。

**参考文献**

[1]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准（2022年版）[M]北京：北京师范大学出版社，2022.

[2]陈晖.落实思想方法教学发挥数学育人价值——以“主元分析法”为例,数学通讯ISSN 0488-73952022年11上半月;12-15.

[3]史宁中，曹一鸣.义务教育数学课程标准（2022年版）解读.[M]北京：北京师范大学出版社，2022.