中考数学压轴题微专题研究
——因动点而产生的轨迹问题

于晓艳
河池市金城江区第二初级中学

摘　要：本文以动点产生轨迹问题为例，通过挖掘学生思维盲点，把问题细化，进行有目标导向的微专题教学设计，探讨了基于动态研究、深度学习的初三数学复习课微专题教学。

关键词：动态研究；轨迹问题；复习课微专题
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2024.07.095

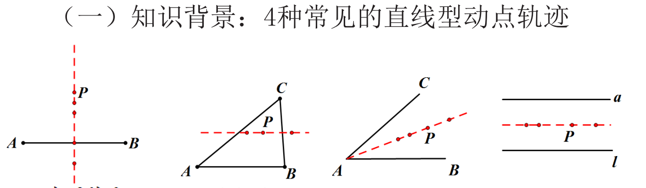
“微专题”又称“小专题”，指针对某一个相关联的、可以单独研究的知识体系，或者某种数学思想方法，作为一个研究主题，根据学生对本节课知识点的基本概念、基本原理、基本规律掌握情况入手，对知识点进行单元整合并运用基本概念和原理解决实际问题的一种“小切口”教学方法。“微专题”教学可以帮助学生形成良好的认知结构，活化知识的运用，提升解决问题的能力。通过教师的深度学习，对数学内容进行深层加工，学生在理解的基础上，寻找知识间的联系，主动探究问题的本质，经历“知其然”，“知其所以然”，“知何由以知其所以然”的过程，领悟数学思想方法，让学生的思维从低阶走向高阶，从而促进学生理解力和学习力提升的学习。教师对问题进行深层次加工，引导学生通过深切的体验和深入的思考，达成对问题的理解；深度学习是阶梯式的学习，教师要根据学生的认知水平设计由浅入深、由表及里的学习过程，让学生的数学学习和思维不断深入.

微专题通常是指围绕复习的重点和关键点设计的，利用具有紧密相关的知识和方法形成的专项研究，或者是能够在短时间内专门解决的问题集．具体展开说，可以源于考点的细化构建微专题、源于知识点的延伸构建微专题、源于易错易混点的辨析构建微专题、源于难点突破构建微专题、源于思维角度的转换构建微专题等.

下面以中考数学动点问题中，点的运动轨迹和路径长问题为例设计微专题。中考数学压轴题——选择填空部分轨迹问题，这是一类很有难度的题目，也是近几年中考数学中的常考题型。其中求点的运动轨迹和路径长问题较为常见。初中阶段常见的轨迹类型是直线形和圆弧形，两种类型中还会涉及点往返运动的往返型。

一、直线型轨迹

（一）知识背景：4种常见的直线型动点轨迹



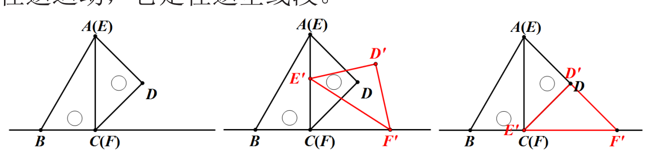
中垂线上　　中位线上　　角平分线上　　等距的平行线上

（二）例题讲解

（2019年浙江省中考第 16题）如图，一副含 30° 和 45° 角的三角板 ABC和EDF拼合在一个平面上，边AC与 EF重合，AC=12cm，当点 E从点 A出发沿 AC方向滑动时，点 F同时从点 C出发沿射线 BC方向滑动，当点 E从点 A滑动到点 C时，点 D运动的路径长为______cm。

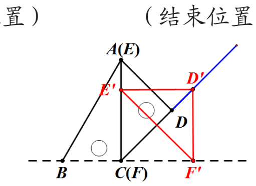
当点E从点A出发，沿AC方向滑动时，点F同时从点C出发，沿射线BC方向滑动，当点E从点A滑动到点C时，点D的运动路径是什么呢？我们会用什么方法猜测点D的运动路径呢？取几个位置尝试一下，那么取哪几个位置进行观察比较好呢？

我们取起始位置，图中任意位置，结束位置，尝试画图，依次连接三个点滴的位置，发现点D在一条直线上往返运动，它是往返型线段。



（起始位置）　　（任意位置）　　（结束位置）

（点 D 在一条直线上运动）



那么点 D究竟在怎样的直线上运动呢？

我们在任意位置 D'处，过点 D'做 $D'N\perp AC$，$D'M\perp BC$，用“角角边”容易证明$\triangle D'E'N\cong\triangle D'F'M$，得 $D'N=D'M$，根据在角的内部到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上，得 D'在$\angle ACM$的平分线上，你想到了吗？

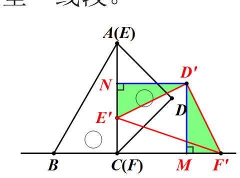
①任画三点定轨迹：“往返型”线段。

思路 1：$\triangle D'E'N\cong\triangle D'F'M$ (AAS)

⇩

$D'N=D'M$

⇩



还能想出其他方法证明点 D'在角平分线上吗？

由于在运动的过程中，$\angle ACF'$和$\angle E'D'F'$始终为 90°，根据对角互补，那么点 $D'E'CF'$四点共圆，因为等腰直角三角形，所以 $D'E'=D'F'$，所以$\angle D'CE'=\angle D'CF'$，在$\angle ACF'$的角平分线上。

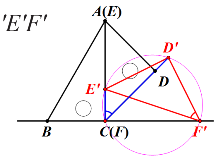
思路 2：$D'E'CF'$ 四点共圆，等腰 $Rt\triangle D'E'F'$

$\Downarrow$

$\angle D'CE'=\angle D'F'E'=\angle D'CF'=45°$

$\Downarrow$

点 D' 在 $\angle ACM$ 的平分线上（角平分线的判定定理）

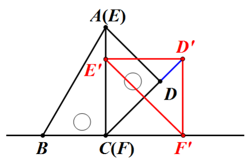


接下来确定始末点，运动状态的始点和末点都是点 D，此时 $CD=6\sqrt{2}$。

那么折返点在哪里呢？在 $Rt\triangle D'NE'$ 中，有斜边大于直角边，所以当 $D'E'\perp AC$ 时，ED 最大，D' 为折返点，此时 $CD'=12$，最后点 D 运动的路径长为（$24-12\sqrt{2}$）厘米。

点 D 运动的路径长：

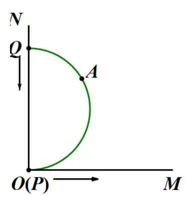
$$\begin{aligned}2DD'&=2(CD'-CD)\\&=2(12-6\sqrt{2})\\&=24-12\sqrt{2}\end{aligned}$$



方法小结：以任画三点确定轨迹，即（1）画开始位置，图中任意位置，中止位置；依次连线，若三点共线，猜想为直线型，有时可能是往返型。（2）确定始末点，有时需要确定折返点。本题利用角平分线性质定理的逆定理，证明了点 D 在角平分线上运动，在求路线长度时要注意“往返型”。

（三）迁移应用，拓展思维能力

如图，射线 OM 与 ON 互相垂直，PQ 是半圆的直径，$PQ=2$，A 是半圆弧上的一点，且弧 AQ 的度数为 60°，当点 P 从与点 O 重合的位置开始，沿射线 OM 滑动时，点 Q 随着沿 NO 方向滑动，当点 Q 到达点 O 时，P、Q 两点都停止滑动，则在整个运动过程中，点 A 所经过的路径长为_______。



任取三点得点 A 的路径是往返线段，由弧 $AQ=60°$，得 $\angle NOA=30°$。可知点 A 在与 OM 夹角为30° 的射线上运动，始点为 A，$OA=\sqrt{3}$。当 $A_1Q\perp OM$ 时，OA_1 最大，所以 A_1 为折返点，此时 $AA_1=2-\sqrt{3}$，当 PQ 在 OM 边上时，末点是 A_2，$OA_2=1$，$A_1A_2=OA_1-OA_2=1$，所以点 A 所经过的路径长为 $3-\sqrt{3}$。

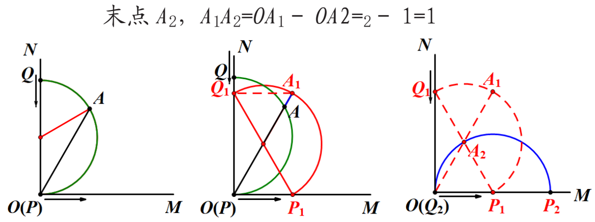
思路：

①确定轨迹：$\angle NOA=30°$，点 A 在射线 OA 上（往返型）

②确定始末点：始点 A，$OA=\sqrt{3}$

折返点 A_1，$AA_1=0A_1-0A=2-\sqrt{3}$

末点 A_2，$A_1A_2=0A_1-0A2=_2-1=1$



（起始位置）（折返点位置）（结束位置）

点 A 所经过的路径长为：$AA_1+=A_1A_2=2-\sqrt{3}+1=3-\sqrt{3}$

（四）解后反思

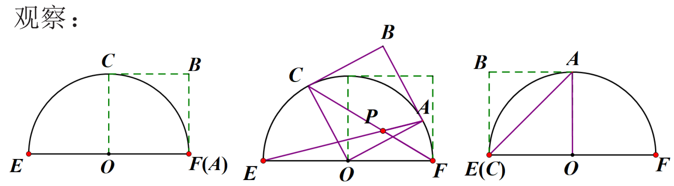
直线型轨迹的破解方法：1.任画三点，尝试定轨迹。2.确定始末点求长度。若是往返型，则需要找出折返点，证明直线型轨迹的依据。直线型轨迹的破解方法本课中用到了角平分线或在角的边上。此外常用的依据还有中垂线上、中位线上去的两条平行线上求解析式的结果。

二、圆弧形轨迹

（2021年贵港期末检测第 16题）如图，正方形的边长为 2，以 O 为圆心，EF 为直径的半圆经过点 A，连接 AE，CF 相交于点 P，将正方形 $OABC$ 从 OA 与 OF 重合的位置开始，绕着点 O 逆时针旋转 90°，交点 P 运动的路径长是______。

当正方形 $OABC$ 的边 OA 从 OF 绕着点 O 逆时针旋转 90°，AE、CF 的交点 P 会怎样运动呢？你会用什么方法猜测点 P 运动的大致路径呢？

任取几个位置尝试一下，那么取哪几个位置进行观察比较好呢？我们取起始位置、任意位置、结束位置来观察：

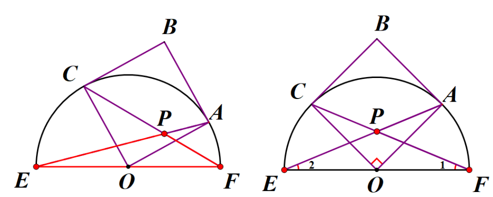


（起始位置）（任意位置）（结束位置）

尝试画图，发现 E、P、F 三个点构成三角形，猜想点 P 在圆弧上运动，点 P 的运动路线是一段圆弧，点 P 究竟在怎样的圆弧上运动呢？

思路：（1）猜想：“圆弧形”

（2）证明：



①在△ EPF 中，$EF=4$，是定边。

②$\angle EPF$ 会是定角吗？

四边形 $OABC$ 为正方形 $\Rightarrow \angle AOC=90°$

$\Rightarrow$ $\angle EOC+\angle FOA=180°-\angle AOC=90°$

$\Rightarrow$ $\angle 1$、$\angle 2$ 为圆周角 $\begin{cases}\angle 1=\frac{1}{2}\angle EOC\\ \angle 2=\frac{1}{2}\angle AOF\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\angle 1+\angle 2=45°$

$\Rightarrow$ $\angle EPF=180°-（\angle 1+\angle 2）=135°$ $\Rightarrow$ $\angle EPF$ 是一个定角

③结论：根据定边定角，那么点 P 运动的路径是以 G 为圆心的圆弧 EF。

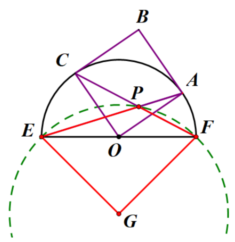
（3）计算：如何来确定弧 EF 的圆心角和半径呢？

求圆心角$\angle EGF$:

在⊙G 中，$\angle EPF=135°$

$\Downarrow$

$\angle EGF = 360°-2\angle EPF = 90°$



求⊙G 的半径:

在 Rt$\triangle EGF$ 中，$EG=FG$，$EF=4$

$\Downarrow$

Rt$\triangle EGF$ 为等腰直角三角形$\Longrightarrow EG=EF\cdot\sin45°=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

点 P 运动的路径长为:

$$\widehat{EF}=\frac{90\pi 2\sqrt{2}}{180}=\sqrt{2}\pi$$

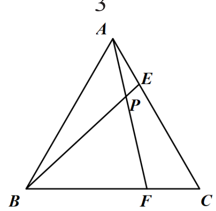
方法小结：通过本题的学习，确定动点轨迹是圆弧形的方法。步骤：1.任画两点猜想轨迹，即依次画出开始位置，图中任意位置，终止位置。若三点构成三角形，则猜想轨迹为圆弧形。2.确定始末点。3.确定圆心角和半径。本题利用定边定角的方法证明了动点的轨迹是圆弧形，再利用弧长计算公式计算动点的路线长。

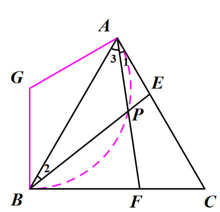
（三）迁移应用，拓展思维能力

如图，等边△ ABC的边长为 6，点 E、F分别是 AC，BC边上的动点，当点 E从点 A运动到点 C时，点 F从点 C运动到点 E，且满足 $AE=CP$，则点 P经过的路径的长为______。

任取三点尝试探究点 P的轨迹，猜想点 P的运动路径是圆弧。

确定始末点得到运动的路径是弧 AB。由等边$\triangle ABC$条件：$AE=CF$，$\angle BAE=\angle ACF=60°$，$AB=AC$，证得$\triangle ACF\cong\triangle BAE$，得$\angle 1=\angle 2$，从而$\angle 3+\angle 2=\angle 3+\angle 1=60°$，得$\angle AGB=2(180°-\angle AGB)=(\angle 2+\angle 3)=120°$，由 $AB=6$得 $AG=BG=2\sqrt{3}$，所以弧 AB的长度等于$\frac{4}{3}\sqrt{3}\pi$。





思路：

①点 P轨迹为圆弧形

②确定始末点，路径是弧 AB

③确定弧 AB的圆心、半径

（四）解后反思

圆弧形轨迹的破解方法：1.任画三点确定轨迹；2.确定始末点；3.确定圆心角及半径。

确定圆弧形轨迹的依据：1.定边定角动点在圆弧上；2.定点定长动点在圆弧上。

中考数学压轴题微专题研究，基于班级学生的现实学情，以一道（组）题或一个素材的研究为引，通过一题多问、一题多解、一题多变、一题多思、借题发挥、探索规律和方法等数学探究活动来揭示其内在的学习线索和数学本质．本文通过 2019年浙江省中考第 16题来发现学生存在的问题，并以此为基础确定微专题的主题，通过挖掘学生思维盲点，把问题细化，通过设置一系列动点变化位置来搭建思维的“桥梁”，引导学生获取新的解题方法，帮助学生构建良好的认知结构，促进学生深度学习．因此基于中考数学压轴题的微专题教学选题要具备主体性和针对性，凸显认知策略，以“易于学生理解”的方式呈现出来，使学生的学习成为一种“再发现再创造”的过程，这也是中考数学压轴题微专题设计的核心所在。

随着教育改革的深入，中考作为衡量学生学业水平的重要标准，其试题的设计与选拔功能日益受到关注。其中，数学作为中考的重要科目，其压轴题更是检验学生综合运用知识、解决问题能力的重要载体。因此，对中考数学压轴题进行微专题研究，不仅有助于提升教学质量，还对学生数学素养的培养具有深远意义。

1.提升教学质量。通过对中考数学压轴题的深入研究，教师可以更加准确地把握中考的命题规律和趋势，从而指导日常教学。教师可以根据学生的实际情况，有针对性地进行知识点的强化和解题技巧的训练，使教学更加贴近中考实际，提高教学的针对性和有效性。

2.培养学生数学素养。中考数学压轴题往往涉及多个知识点的综合运用，需要学生具备扎实的数学基础和灵活的解题思维。通过对压轴题的研究和练习，学生可以逐渐培养起数学思维的逻辑性和严谨性，提升对数学美的认识，进一步增强学习数学的兴趣和自信心。

3.提高解题能力。中考数学压轴题通常具有较高的难度和挑战性，对学生的解题能力提出了较高的要求。通过对压轴题的微专题研究，学生可以学会如何分析题目、如何运用所学知识解决问题，从而在实践中不断提高解题能力，为未来的学习和生活打下坚实的数学基础。

4.为中考备考提供策略指导。通过对中考数学压轴题的研究，教师可以总结出一些有效的解题策略和应试技巧，为学生的中考备考提供指导。这不仅可以帮助学生更好地应对中考，还可以培养学生的应试心态和策略思维，为学生的全面发展提供有力支持。

综上所述，中考数学压轴题微专题研究的意义重大。它不仅有助于提升教学质量，培养学生的数学素养和解题能力，还可以为中考备考提供策略指导。因此，我们应该重视中考数学压轴题的研究工作，为教育事业的发展贡献力量。

参考文献

[1]张文海．“微专题的特点”：让高三数学复习走向素养落实 [J],数学通报，2020(07).

[2]吕增峰．基于认知策略的微专题教学--以“含参绝对值二次型函数的最值”为例 [J],中小学数学（高中版）,2018(01).

[3]庄丰．基于深度学习的数学解题探析 [J].中国数学教育，2019(01).