

指向高阶思维的初中数学教学探索

——以三角形内角和定理及其推论为例

蔡丹丹

江苏省南通市虹桥二中

摘要：培养学生的数学思维能力是数学教学的关键。通过数学教学，教师要引导学生学会用数学提出问题、分析问题和解决问题。在教学过程中，教师应立足初中生思维进阶的特点，结合学生已有认知发展水平，整合教学内容，精心设计不同思维水平的问题，在引导学生分析和解决问题的过程中潜移默化地发展学生的高阶思维，提升解决数学问题的能力。本文旨在以“三角形内角和定理及推论”为例，阐释指向高阶思维的数学教学应从以下四个层次展开：一、激活已知，建立关联；二、感悟理解，发现规则；三、实践应用，巩固深化；四、迁移创新，解决问题。

关键词：高阶思维；初中数学；教学设计；问题解决

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2024.10.083

引言

数学是研究空间形式和数量关系的科学，具有高度的抽象性，结论的确定性和应用的广泛性。培养学生的数学思维能力是数学教学的关键，是进行数学教学活动的宗旨和指导思想。课堂教学应重视学生数学思维能力的培养，引导学生学会用数学思考问题和解决问题。因此，教师要基于学生已有的知识水平以及思维进阶特点，有目的、有计划、有针对性地进行系统安排教学内容，精心设计多元教学活动，发展学生的高阶思维能力。

但在实践教学中，目前的数学课堂存在着教师的教与学生的学脱节的问题，教学活动设计缺乏思维梯度，大多停留于记忆、理解层面，注重定理、规则的记忆，缺乏对定理、规则的多元应用能力的培养以及问题解决能力的发展，尤其是不能从基础知识的运用中深刻理解相关内容的知识组合的重构进而抽象出解决问题的流程，这种很大程度上阻碍学生高阶思维能力的发展。

基于此，本文以数学新人教版八年级上册第十一章第二节“与三角形有关的角”为例，具体阐释教师应该基于学生已有认知水平和认知发展阶段特征，设计不同思维水平的典型问题，引导学生在问题解决过程中深度理解和准确应用数学概念，巩固和迁移数学方法，建立和归纳数学模型，发展高阶思维。

一、激活已知，建立关联

意义学习主要是指从所呈现的学习材料中获得新的意义。它首先要求学习者具备意义学习的心向，这是意义学习的前提条件之一，即学习者积极地将要学习的新材料与自己认知结构中已有的有关观念进行实质性和非人为性联系的倾向性^[1]。换言之，建立新旧知识之间的有意义联结可以为学生学习新知识做好认知铺垫，即激活学生与新知识相关的已有知识是有效学习新知识的前提。

以三角形内角和定理及其推论为例，《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称《课标2022》）要求学生理解“三角形内角、外角的定义”，“掌握三角形内角和定理推论”^[2]。其中三角形内角和定理具体内容学生小学时期接触过，初中阶段主要在方法上加以论证强化归、转化的思想。另外，从三角形内角、外角的定义转向三角形内角和定理推论，实际上是从概念性知识转向程序性知识，要求学生在理解概念的基础上，发展学生的推理能力和规则的运用能力。基于此，教师在课堂导入环节可以通过提问来激活学生有关三角形的已有知识，强化三角形内角、外角的概念理解的基础上，建立新旧知识学习的实质性联系。

师：目前对于三角形的角大家有哪些认识？

生：三角形的内角和 180° ，外角和 360° ，三角形的每一个外角等于不相邻的两个内角和，三角形的每一个外角大于任何一个不相邻的内角。

设计意图：此活动旨在通过回顾相关概念，新知三角形的外角将三角形内外部联系起来，拓宽已有知识的边界，为新知识的学习做好铺垫。

二、感悟理解，发现规则

有意义的学习在强调新旧知识间的联结，还强调学生的主动参与和体验获得新知识，这是课堂教学不可或缺的环节，教师可设计出延伸性问题，促进学生投入有意义的学习之中，并依托已得出的结论，拓展到更多三角形内角和定理的情境，帮助学生体验由特殊到一般的思想方法，为下一步的实践运用作好铺垫。

《课标2022》指出：教学时突出对学生三角形内角与外角的相关概念和性质的评价，体现基础性，同时关注在学习数学和应用数学在解决问题中最核心的设参思想与方程思想^[2]。

问题1：已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 3 : 4 : 5$ ，求这个三角形相邻三个外角的度数比。

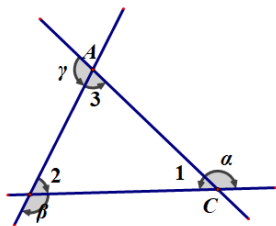


图1

师：该题从条件出发能想到什么知识点？

生：三角形内角和 180° 。

师：有哪些解题思路？

生：可以通过比例设参利用三角形内角和列方程进而求出每一个内角，再求每一个外角，最后求外角比。

生：也可以根据每个内角在内角和的占比直接求每一个内角。

师：以上两种方法有什么不同，又有什么联系？

生：两种不同之处在于求内角的方法，第一种用方程的思想，第二种用每一个内角在和的占比求得。他们的联系在于都是具体求出每一个内角的度数再求外角。

问：有没有什么办法不求具体角度就能解决问题呢？

生：可以借助第一个方法直接求外角比。

设计意图：问题1旨在引导学生强化比例问题主动设参的方程思想，以及通过整体与部分的比例进行运算的能力。进一步引导学生通过观察比较以上两种方法的异同归纳所用方法的特征，引导学生结合前面两种方法直接将内角比转化为外角比，更简洁的利用三角形内角和定理的推论，找到条件和结论最本质的联系。教师也可以提醒学生解题方法多元的重要性，需要比较和分析不同方法之间的异同。同时注意根据问题情境选择不同方法，提高方法使用的有效性，方法的有效选择直接体现学生对知识点本质的掌握程度。

学生在运用所学知识解决简单问题的过程中初步认识到解题方法的多样性，同时发展学生的运算和推理能力，通过已知三角形内角比求外角比的教学过程促进学生提升从特殊到一般的数学归纳和概括能力。

三、实践应用，巩固深化

学生通过完成问题1，可以进一步理解三角形内角和定理及其推论的内涵及推理过程，尤其是理解前后数学概念的关联，但教学不能止步于此。教师还要促进学生通过内容的迁移、整合来建构知识体系，获得深刻的学习体验。因此，教师还需设计所学知识的实践应用情境，通过实践运用，理解知识运用的内在逻辑和多元目的。换言之，教师还应设计针对性的教学活动，促进学生在实践应用中巩固和深化理解所学知识，以扭转数学教学“知识本位”的现状。基于此，教师可以设计问题2引导学生对三角形内角及其定理做进一步的探索。

问题2：已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 1 : 4 : 5$ ，求这个三角形相邻的三个外角的度数比。

师：这类问题现在你会选择第几种方法解决？条件特征是什么？

生：用第三种，可以直接求得外角比。

师：该方法和结论是否具有一般性？如果有能否证明？

生：结论具有一般性。

若 $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = a : b : c$

则设 $\angle 1 = ax$ $\angle 2 = bx$ $\angle 3 = cx$

$\therefore \alpha = \angle 2 + \angle 3 = bx + cx = (b+c)x$

$\beta = \angle 1 + \angle 3 = ax + cx = (a+c)x$

$\gamma = \angle 1 + \angle 2 = ax + bx = (a+b)x$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = (b+c)x : (a+c)x : (a+b)x = (b+c) : (a+c) : (a+b)$

师：能否用文字语言描述这个一般性的结论？

生：三角形的外角比等于两不相邻内角和之比。

师：大家观察一下解决该问题，我们经历了哪些步骤，各自的目标是什么？

生：第一步设出一般情况下内角比，方便得出一般性结论；第二步表示各外角，为求比做准备；第三步表示外角之比。

设计意图：问题2旨在帮助学生通过解决这类问题的活动过程进一步巩固和加深理解解决该类问题的最优方法以及该方法的本质特征，将学生的思维导向一般性结论的归纳上，通过观察猜测抽象出一般结论再进行验证，锻炼学生的逻辑推理能力，达到提升知识建构及问题解决能力的目的。用文字整理归纳一般结论考验学生对条件和结论的完整性描述以及对问题本质的理解。

问题解决方法的归纳整理有利于学生掌握整体的解题框架，为以后遇同类型问题熟练解题流程。该过程有助于学生理解逻辑推理在形成数学概念等解决问题中的重要性，初步掌握推理的基本形式和规则，对于一些简单问题能够通过特殊结果推断一般结论，理解命题的结构与联系，探索并表述论证过程，感悟数学的严谨性，初步形成逻辑表达与交流的习惯^[3]。

四、迁移创新，解决问题

在学生理解数学基本概念和法则的本质内涵，以及数学基本概念之间的联系基础上，教师还应基于解题方法的多元性以及不同方法的本质特征，引导学生建立数学与现实世界之间的联系，帮助学生能够合乎逻辑地解释和论证数学方法与结论，分析和解决简单的数学问题和实际问题，发展数学思维的灵活性。数学思维的灵活性常体现在对条件和结论逻辑关系的深刻把握，以对条件或结论替换的猜想构造新的逻辑。学生通过自己的体验去提出问题，通过理论去分析问题，进而激发学生的内在求知欲，并通过问题的探索提高解决问题的能力^[4]。

教学中,教师应灵活处理知识点之间,所学知识与现实之间的多元联系,提升学生的参与度和获得感,发展数学思维。

师:我们为了更多角度的研究问题常常会调整条件和结论的位置,如问题1是已知三角形的内角比求外角比,同学们能否模仿这个题型出一道类似的题型?

生:已知外角比求内角比。

问题3:若已知一个三角形的三个外角比 $\angle \alpha : \angle \beta : \angle \gamma = 9 : 8 : 7$,求这个三角形的三个内角比。

师:这道题的条件和问题有没有直接的关系?能否直接互相表示?

生:没有直接关系,不能直接互相表示。

师:该题选择从条件出发还是问题出发?为什么?

生:从条件出发,因为外角的条件想到三角形外角和 360° ,进而可以求每一个外角。

师:大家观察一下解决该题,我们经历了哪些步骤,各自的目标是什么?

生:第一步求每一个外角,第二步求对应内角,第三步求内角比。

设计意图:通过改变条件或者改变结论来构造新问题,可以发展学生数学想象力,体会逻辑的魅力,提高学习数学的兴趣。分析问题时常用的思考模型是学生解决大部分题目的有效手段,需在平时的课堂中加以强化。在解题中常常从熟悉的问题入手,问题3虽然条件和问题熟悉但是不能直接借鉴问题2解决的捷径,所以需要学生重新从题目出发,找到相关的条件转化路径与结论互通,从而锻炼分析解决问题的能力。该题中条件指向单一,可以通过三角形外角和的性质具体求得各外角进而求各内角。此时可以发现与问题1中的第二种方法相通,可以让学生从不熟悉回到熟悉的问题解决策略中,发现问题的共性,为问题解决方法的概括、归纳以及应用提供参照框架。

在此基础上,教师还可以设计问题4,给学生创造更多的实践机会去练习、强化,解决学生在面对新问题时不知如何处理或者不敢处理的心态,培养学生积极的学习态度和情感。

问题4若已知一个三角形的三个外角比 $\angle \alpha : \angle \beta : \angle \gamma = 5 : 4 : 3$,求这个三角形的三个内角比。

师:该题和问题3题型是否一致?大概的解题步骤是什么?

生:一致,先利用外角和求每一个外角,再求对应内角,最后求内角比。

师:大家再观察一下解题步骤,能否从中发现类似问题2的一般性结论?能否证明?

生:可以有一般性结论。设一个三角形的三个外角比 $\angle \alpha : \angle \beta : \angle \gamma = d : e : f$

又 $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 360^\circ$

$$\therefore \angle \alpha = 360^\circ \times \frac{d}{d+e+f} = \left(\frac{360d}{d+e+f} \right)$$

$$\angle \beta = 360^\circ \times \frac{e}{d+e+f} = \left(\frac{360e}{d+e+f} \right)$$

$$\angle \gamma = 360^\circ \times \frac{f}{d+e+f} = \left(\frac{360f}{d+e+f} \right)$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle \alpha = 180^\circ - \left(\frac{360d}{d+e+f} \right) = 180^\circ \left(\frac{d+e+f-2d}{d+e+f} \right) \\ = \left(\frac{e+f-d}{d+e+f} \right) 180^\circ$$

同理可得:

$$\angle 2 = \left(\frac{d+f-e}{d+e+f} \right) 180^\circ \quad \angle 3 = \left(\frac{d+e-f}{d+e+f} \right) 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = \left(\frac{e+f-d}{d+e+f} \right) 180^\circ : \left(\frac{d+f-e}{d+e+f} \right) 180^\circ :$$

$$\left(\frac{d+e-f}{d+e+f} \right) 180^\circ = (e+f-d) : (d+f-e) : (d+e-f)$$

师:你能用文字语言表述这个一般性结论吗?

生:三角形的内角比等于不相邻两外角比的和与相邻外角差的比

设计意图:为了巩固本单元所学知识,问题4旨在让学生观察和分析解题过程,发现在具体问题处理过程中不变的一致内容,有助于归纳整理出一般性结论,从而节省了大量的计算推理过程。同时,也可以引导学生关注到研究内容的相似性和研究方法的一致性从而去体会学习该部分内容的整体性,学会利用数学知识、数学方法、数学模型等去解决现实世界中的实际问题。

数学教学不能停留在记忆、理解浅表层面,教师应该基于学生已有认知水平和认知进阶的发展特点,设计不同思维水平的问题,引导学生在分析和解决问题的过程中理解和内化所学知识,巩固和迁移数学方法,建立和归纳数学模型,促进学生高阶思维的发展。

参考文献

- [1] 美·戴维·保罗·奥苏贝尔著名·毛伟译·意义学习新论—获得与保持知识的认知观[M].杭州:浙江教育出版社,2018.6,第7页.
- [2] 中华人民共和国教育部制定·义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022:第22页.
- [3] 曹一鸣主编·新版课程标准解析与教学指导(2022版)初中数学[M].北京:北京师范大学出版社,2022:第22页.
- [4] 李信任·深度学习视域下的初中数学教学设计实践探索——以“球赛积分表”为例[J].教师发展,2023(8):88-89.
- [5] 韦丽云·基于核心素养的初中几何入门教学实践探究——以“三角形内角和定理及其推论的应用”教学为例[J].中学数学教学参考,2017(11X):3.
- [6] 汪向丽·教材例题习题的二次开发——以《三角形内角和定理》为例[J].山东教育:中学刊,2021,000(029):P.59-60.