

《勾股定理》大单元教学设计

——数学学科课程设计

杜广迪

山东省青岛第七中学

摘要: 随着新课标的推进,大单元教学由最初的“摸着石头过河”,进入到现在的研究发展阶段。本大单元设计以“勾股定理”单元为例,主要从单元课标要求、教材分析、学情分析、单元目标和单元评价进行阐述。借助教学实践,提高课堂效率,提升学生数学素养。

关键词: 大单元教学;勾股定理;多元目标评价

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2024.10.085

引言

背景分析: 1. 课标要求:探索勾股定理及其逆定理,并能运用他们解决一些简单的实际问题。解读:通过观察猜想得到结论,通过逻辑推理得出结论,建立基本的几何模型,培养学生的数学核心素养。2. 教材分析:“勾股定理”选自北师大版教材八年级上册第一章。勾股定理是几何中几个重要定理之一,它揭示的是直角三角形中三边的数量关系。它在数学的发展和现实世界中起过重要的作用。本章是直角三角形相关知识的延续,同时也是学生认识无理数的基础,应用勾股定理解决一些实际问题,充分体现了数学知识承前启后的紧密相关性、连续性。在具体问题的解决过程中,需要经历几何图形的抽象过程,需要借助观察、操作等实践活动,这些都有助于发展学生分析问题、解决问题的能力 and 应用意识。3. 学情分析:八年级学生已经具备一定的观察、归纳、探索和推理的能力。在小学,他们已学习了一些几何图形面积的计算方法(包括割补法),但运用面积法和割补思想解决问题的意识和能力还远远不够。部分学生听说过“勾三股四弦五”,但并没有真正认识什么是“勾股定理”。此外,学生学习积极性普遍较高,探究意识较强,课堂活动参与较主动,但合作交流能力和探究能力有待加强。

一、创设情境,引入新课

让学生介绍古人利用勾三股四弦五,引入新课。2002年世界数学家大会在我国北京召开,本届世界数学家大会的会标如图1所示。紧扣课题,自然引入,同时渗透爱国主义教育,激发学生的求知欲和爱国热情。

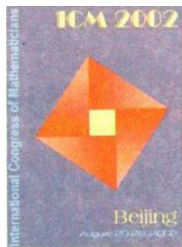


图1

二、探索发现勾股定理

探究活动1。(1)观察地板砖示意图,如图2,引

导学生从面积角度观察图形。(2)你能发现各图中三个正方形的面积之间有何关系吗?(3)学生通过观察,归纳发现:结论1。以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和,等于以斜边为边长的正方形的面积。从观察实际生活中常见的地板砖入手,让学生感受到数学就在我们身边。通过探索发现,让学生得到成功体验,激发进一步探究的热情和愿望。

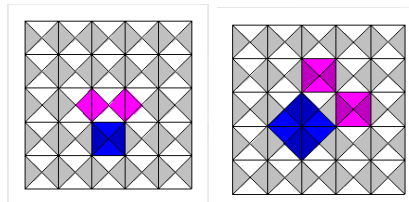


图2

探究活动2。由结论1我们自然产生联想:一般的直角三角形是否也具有该性质呢?(1)观察下面两幅图,如图3。(2)你是怎样得到正方形C的面积?与同伴交流。(学生可能会做出多种方法,教师应给予充分肯定。)结论2。以直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和,等于以斜边为边长的正方形的面积。探究活动2意在让学生通过观察、计算、探讨、归纳进一步发现一般直角三角形的性质。数学小史:勾股定理是我国最早发现的,中国古代把直角三角形中较短的直角边称为勾,较长的直角边称为股,斜边称为弦如图4、5、6勾股定理”因此而得名(在西方文献中又称为毕达哥拉斯定理)。

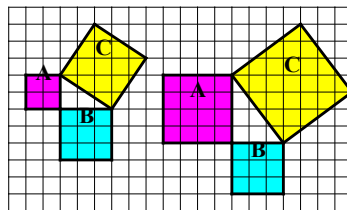


图3

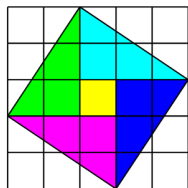


图 4

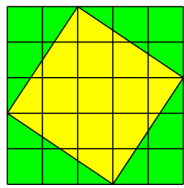


图 5

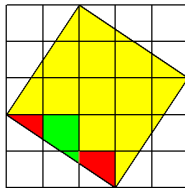


图 6

三、课堂评价反馈

意在巩固基础知识。

四、课堂小结

通过畅谈收获和体会，不仅可以培养学生口头表达和交流的能力，增强不断反思总结的意识，也可增进师生、生生之间的交流、互动。

五、作业布置

课后作业设计包括了两个层面：作业 1 是为了巩固基础知识而设计。作业 2 是为了扩展学生的知识面。可让学生进一步认识勾股定理的前提条件，加强对本课知识的理解和掌握。

单元活动：用面积法验证勾股定理，应用勾股定理解决简单的实际问题

(一) 复习设疑，激趣引入

教师提出问题：1. 勾股定理的内容是什么？（请一名学生回答）。2. 上节课我们仅仅是通过测量和数格子，对具体的直角三角形探索发现了勾股定理，对一般的直角三角形，勾股定理是否成立呢？这需要进一步验证，如何验证勾股定理呢？事实上，现在已经有几百种勾股定理的验证方法，这节课我们也将去验证勾股定理。（1）复习勾股定理内容。（2）回顾上节课的探索过程，强调仍需对一般的直角三角形进行验证，培养学生严谨的科学态度。（3）介绍世界上有数百种验证方法，激发学生兴趣。通过这一环节，学生明确了：仅仅探索得到勾股定理还不够，还需进行验证。当学生听到有数百种验证方法时，马上就有了去寻求属于自己的方法的欲望。

(二) 小组活动，拼图验证

活动 1. 教师导入，小组拼图。师：今天我们将研究利用拼图的方法验证勾股定理，请你利用自己准备的四个全等的直角三角形，拼出一个以斜边为边长的正方形。（请每位同学用 2 分钟时间独立拼图，然后再 4 人小组讨论。）

活动 2. 层层设问，完成验证。1. 学生通过自主探究，小组讨论得到如图 7、图 8 的两个图形。2. 教师提问：

(1) 如图 7，你能表示大正方形的面积吗？能用两

种方法吗？（学生先独立思考，再 4 人小组交流）。

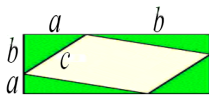


图 7

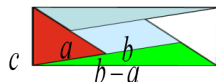


图 8

(2) 你能由此得到勾股定理吗？为什么？（在学生回答的基础上板书 $(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2$ ，并得到 $a^2 + b^2 = c^2$ ）。3. 学生自主探究，利用图 8 验证勾股定理。小结：我们利用拼图的方法，将形的问题与数的问题结合起来，联系整式运算的有关知识，从理论上验证了勾股定理。

设计活动 1 的目的是让学生在活动中体会图形的构成，既为勾股定理的验证作铺垫，又培养学生的动手、创新能力。在活动 2 中，学生在教师的层层设问的引导下完成对勾股定理的验证，完成本节课的一个重点内容。然后让学生利用另一个拼图独立验证勾股定理，目的是让学生再次体会数形结合的思想并体会成功的快乐。学生通过先拼图从形上感知，再分析面积验证，比较容易地掌握了本节课的重点内容之一，并突破了难点。

(三) 延伸拓展，能力提升

1. 议一议。观察图 9。用数格子的方法判断图中三角形的三边长是否满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 。2. 已知：一个直角三角形的斜边为 20 cm，且两直角边的长度比为 3:4，求两直角边的长。

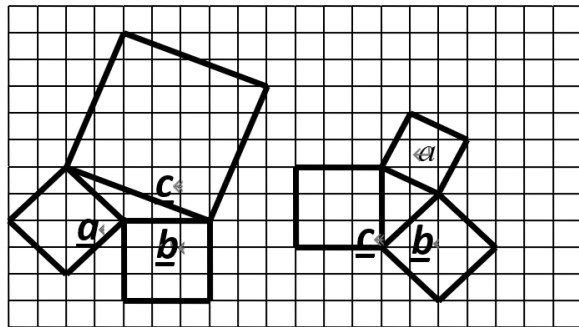


图 9

(四) 例题讲解，初步应用

例：飞机在空中水平飞行，某一时刻刚好飞到一个男孩子头顶上方 4 000 m 处，过了 20 s，飞机距离这个男孩子头顶 5 000 m，飞机每小时飞行多少千米？

解：设点 A 为男孩头顶，点 C 为正上方时飞机的位置，点 B 为 20 s 后飞机的位置，如图 10。 $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ，即 $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9\,000\,000$ ，所以 $BC=3\,000$ ，所以飞机的速度为 $3\,000 \div 20 = 150$ (m/s) = 540 (km/h)。答：

飞机每小时飞行 540 km。(1) 初步运用勾股定理解决实际问题, 培养学生应用数学的意识和能力。(2) 体会勾股定理的应用价值. 学生对这样的实际问题很感兴趣, 基本能把实际问题转化为数学问题并顺利解决。

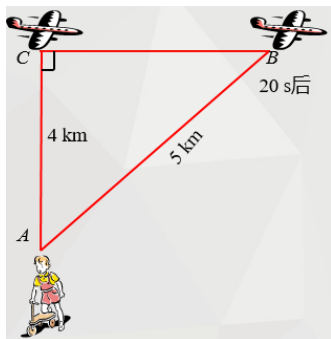


图 10

(五) 追溯历史, 激发情感

由学生利用所搜集的与勾股定理相关的资料进行介绍。国内调查组报告: 用图 11 证勾股定理的方法, 据记载最早是三国时期数学家赵爽在为《周髀算经》作注时给出的, 我国历史上将图 11 上的正方形称为“弦图”。2002 年的数学家大会 (ICM-2002) 在北京召开, 这届大会会标的中央图案正是经过艺术处理的弦图。如图 12 这既标志着中国古代的数学成就, 又像一只转动的风车, 欢迎来自世界各地的数学家们! 国际调查组报告: 勾股定理与第一次数学危机。



图 11



图 12

约公元前 500 年, 毕达哥拉斯学派的弟子希帕索斯 (Hippasus) 发现了一个惊人的事实, 一个正方形的对角线的长度是不可公度的. 按照毕达哥拉斯定理 (勾股定理), 若一个正方形的边长是 1, 则它的对角线的长不是一个有理数, 它不能表示成两个整数之比, 这一事实不但与毕氏学派的哲学信念大相径庭, 而且建立在任何两个线段都可以公度基础上的几何学面临被推翻的威胁, 第一次数学危机由此爆发. 据说, 毕达哥拉斯学派对希帕索斯的发现十分惶恐、恼怒, 为了保守秘密, 最后将

希帕索斯投入大海. 不能表示成两个整数之比的数, 15 世纪意大利著名画家达·芬奇称之为“无理的数”, 无理数的英文“irrational”原义就是“不可比”. 第一次数学危机一直持续到 19 世纪, 实数的基础建立以后才圆满解决. 我们将在下一章学习有关实数的知识。

趣闻调查组报告: 勾股定理的总统证法。在 1876 年一个周末的傍晚, 在美国首都华盛顿的郊外, 有一位中年人正在散步, 欣赏黄昏的美景……他走着走着, 突然发现附近的一个小石凳上, 有两个小孩正在聚精会神地谈论着什么, 时而大声争论, 时而小声探讨. 由于好奇, 他循声向两个小孩走去, 想搞清楚他们到底在干什么. 只见一个小男孩正俯着身子用树枝在地上画着一个直角三角形 (如图 13)……于是这位中年人立即回家, 潜心探讨小男孩给他留下的难题。他经过反复地思考

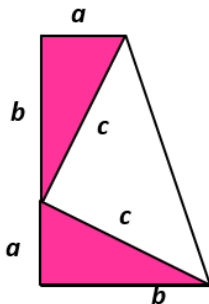


图 13

与演算, 终于弄清楚了其中的道理, 并给出了简洁的证明方法。1876 年 4 月 1 日, 他在《新英格兰教育日志》上发表了他对勾股定理的这一证法。1881 年, 这位中年人——伽菲尔德就任美国第二十任总统。后来, 人们为了纪念他对勾股定理直观、简洁、易懂、明了的证明, 就把这一证法称为“总统”证法。这个环节完全由学生来组织开展, 教师可在两天前布置任务, 让部分同学收集勾股定理的资料。介绍与勾股定理有关的历史, 激发学生的爱国热情; 学生加强了对数学史的了解, 培养学习数学的兴趣; 通过让部分学生搜集材料, 展示材料, 既可以让学生得到充分的锻炼, 同时也可以活跃课堂气氛。

六、回顾反思, 提炼升华

教师提问: 通过这节课的学习, 你有什么样的收获? 师生共同畅谈收获。归纳出本节课的知识要点, 数形结合的思想方法; 教师了解学生对本节课的感受并进行总结; 培养学生的归纳概括能力。

参考文献

- [1] 丁慧嫣. 新课标背景下单元整体教学设计的案例分析——以“二次根式复习”为例 [J]. 初中数学教与学, 2024 (06): 21-24.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准: 2022 年版 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [3] 董连春, 吴立宝, 王立东. PISA2021 数学素养测评框架评介 [J]. 数学教育学报, 2019, 28 (04): 6-11+60.