

# 重视基本图形变式，培育学生模型观念

## ——以《相似三角形之一线三等角》为例

徐莉丽

萍乡市田家炳中学

**摘要：**“一线三等角”模型是初中数学几何学习中的重要模型，也是初中数学学考高频考点。相似三角形之一线三等角是在学习了相似三角形的判定定理后的专题复习。本文从“一线三等角”的专题教学，重视“一线三等角”图形变式，培育学生模型观念。

**关键词：**一线三等角；变式；模型观念

**【DOI】** 10.12252/j.issn.2096-627X.2024.11.202

### 引言

学习“一线三等角”主要是为了让学生能够在相似三角形的过程中，总结模型背后的内在数学知识逻辑，构建完整的知识体系，探索几何图形中蕴含的基本数学思想方法，通过“一线三等角”变式教学，突破三角形相似难点，发展初中生模型观念，使学生感悟到基本图形的无穷妙用，进而达到融汇贯通，让学生心中有图，处处是路。

### 一、教学策略分析

#### （一）教学内容与目标

教学内容：相似三角形常见模型之“一线三等角”

教学目标：

①能够根据给出的图形，抽出“一线三等角”基本结构。

②主要利用“两角分别相等的两个三角形相似”找到相似三角形，从而解决问题。

③能够运用“一线三等角”模型解决问题。

#### （二）学情分析

学生在学习这节专题课之前，已经有了全等三角形的判定和相似三角形的判定知识基础，对探索简单图形的基本性质有了基本的数学思想和活动经验。但对于比较复杂的相似问题解决思路和方法还是比较局限。特别是对于需要添加辅助线构造相似三角形的问题，学生解决起来是比较困难的。所以在较复杂的几何图形中，观察出简单的基本图形，化难为易解决相关问题就非常关键。学生学习数学的热情较高，乐于参与，有较好的合作精神。

#### （三）教学策略选择

本节课以合作探究的方式，引导学生自主构建知识体系，注重课堂生成，重视归纳总结，提炼思想方法。

### 二、教学实践与效果

#### （一）教学实践过程描述

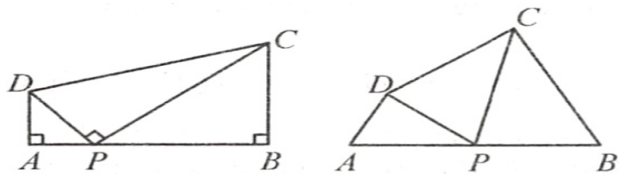
整体教学过程包括三个阶段：第一阶段：聚焦问题，夯实基础。这里主要从课本知识和练习题中的常见问题出发。这里指向回归课本，回顾基础知识，巩固思想方法，磨练解题技能，构建知识体系，体会问题提出方法。第二阶段：变式题目，归纳模型。这阶段是着重提高学生发现和提问能力，通过不断变式，让学生发现问题的内涵，感悟知识不变的本质。第三阶段：分层定位，提升素养。这个阶段着重分析与解决问题能力。将“四基”与核心素养关联起来，在课堂教学中将核心素养落地生根。

在教学过程中，教师采取启发式、探究式教学方法，有效地引起学生的学习兴趣。学生通过教师的引导，能够独立思考，并尝试解答问题。在教学问题的过程中，有部分学生能够通过独立思考发现知识的本质，能够在利用三角形内角和，平角的性质和三角形内角与外角的关系得到角相等。再用两角分别相等的两个三角形相似来证明。这是学生通过对知识尝试运用后，发现的知识内涵，不管图形如何变式，都可以得到这个结论。通过学生自我发现，得到了正确的结论，学生迫不及待地表达出来，把自己的发现分享给同学和教师。在探索过程中，学生获得数学学习探究的成功快乐和体验到了学习数学的喜悦。本节课教学资源是通过九年级数学备课组反复打磨选择的教学资源。考虑到学生年龄特征和认知特征，选择恰当的教学资源。在总结基本图形变式的过程中，借助多媒体、几何画板等辅助教学，将基本图形的动态变式呈现在学生面前，使学生感受到模型动态的可视化，有效形成了学生的模型观念和几何直观。

#### （二）试题呈现

例题（1）问题：如图1，在四边形ABCD中，P为AB边上一点， $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$ ，求证： $AD \cdot BC = AP \cdot BP$ 。

(2) 探究：如图 2，在四边形 ABCD 中，P 为 AB 边上一点，当  $\angle DPC = \angle A = \angle B = \theta$  ( $\theta \neq 90^\circ$ ) 时，(1) 中结论是否依然成立？请说明理由。



本题要查相似三角形的判定，第①问是给出具体的角度， $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$ ，在教学的过程中，分析第①问，从结论要证明  $AD \cdot BC = AP \cdot BP$ ，将等积式转化为比例式  $\frac{AD}{AP} = \frac{BP}{BC}$ 。进而要证明三角形相似。根据这四条线段，然后去找是需要证明哪两个三角形相似。很容易知道是要证明  $\triangle ADP \sim \triangle BPC$ 。第二问是的角度没有具体化，大部分学生停留在具体角度、特殊角度思维中。是因为学生不知道在角度的变化过程中，图中哪些等量关系，知识的本质并没有发生变化。学生是需要掌握通过代数（三角形内角和、平角的定义或内外角的关系）推理得到还是存在角相等。这是一个深度理解知识的内化过程。等角发生变化、图形也就发生了变化，但是其中的等量关系并没有变化，从而得到“一线三等角的基本图形”。

在课堂教学中，中等偏下的学生很难理解这过程。图形动态变化、运用数学概念等逻辑推理是学生学习几何图形性质的一大难点。

### 三、教学效果评估

相似三角形的判定是在整个初中数学阶段都非常重要的内容，很多学生在学习时，遇到不少困难。基于本节课的教学反馈，大部分学生能够解答第一问，知道是需要证明三角形相似并能够正确地找到要证明两个的相似三角形。通过证明是相似三角形，再根据相似三角形的性质写出线段成比例。再将比例式转换成等积式。经过例题的讲解，模型总结，全班 47 人学生有 30 个学生已经对这种模型非常了解，能够根据题中提取关键信息，并结合图形能够找到“一线三等角”基本图形，并能够运用相似三角形判定定理来证明三角形相似以及求线段的长度。在问题解决能力方面，学生能够从问题出发进行逆向思考。如在第一问中，虽然问题没有直接指向证三角形相似，但是能够根据给出图形通过几何直观和结论能够想到解决问题的关键是要说明三角形相似。

### 四、教学反思与改进

#### (一) 教学反思

本节课旨在通过一个几何模型的深入研究，挖掘其

内在的学习线索与数学本质，基于学生情况，科学、合理、有序地组织学生进行相关的数学探索活动，从而完成一节课的教学任务，以此达成发展学生模型观念的培养。

在教学中，有部分学生还是很快地发现知识本质并能够与数学语言准确地表达出来。在学生合作交流的过程中，有部分学生没有有效地参与到课堂教学活动。同时有的教学过程没给予充足的时间让学生去思考，有些任务环节还要设计得更具有逻辑递进性。在基本几何图形的变式中发现共同的规律，学生会分析与看到几何图形的本质特征。回顾教学过程，我主要通过几道题的练习中，让学生独立思考，探究、发现规律、总结模型。然后鼓励学生用数学语言描述模型和模型的内在本质。课堂的实施过程也有些不足的地方：大部分学生是需要模型结构很完整图形简单的情况下知道运用知识解决问题。模型结构完整但图形复杂的变式下，学生不容易找到模型。如果模型结构不完整学生就很难发现了。比如在平面直角坐标系中，建构“一线三等角”，在无刻度直至作图中，借助方格纸建构“一线三等角”来解决问题。

上好专题课，借助“一题多变”的专题课，重在引导学生指向培养学生模型观念的“精准”问题，从中找到能立足学生思维发展、促进能力发展的现实需求的问题，并围绕这些问题开展探究式教学，尽可能地提高课堂教学效率，为学生带来真正的知识储备。这就要求我们一线数学教师要做好以下几点。第一，要解决“模型”的来源问题。通常我们是根据考点，合理地选择一题（或一个材料），这个题或（或一个材料）可以从教材例题、教材习题、配套的练习题、学业水平考试真题等来源选择，问题要求具有一定深度和拓展性，符合本节课模型学习的目标和探索方向。第二，要围绕“一题”组织教学，可以采取深度剖析原题，分析问题条件，理清题目中蕴含的数学本质（模型），通过变式对比，夯实基础，达成教学目标。第三，引导学生提出的“精准问题”。在学生提出问题环节，最后针对问题开展高效教学，教师要基于学生的立场，引导学生积极参与课堂教学活动，引发学生独立思考，建构完整的“一线三等角”模型知识体系。

#### (二) 教学改进策略

基于以上课堂教学中的问题，我采取以下策略优化我的课堂教学。

##### 1. 立足基本图形的分析与理解，夯实基础知识

熟练掌握基本图形的性质，是学生在学习几何知识的第一关。在教学过程中，教师要让学生明白“看山是山”。当呈现的基本图形时，就要引导探究该图形的基本性质，

让学生看到图形就要想到相应的知识点。相似三角形的判定是初中几何的重点也是难点。大部学生学习相似三角形的知识会比较吃力。比如很难在图形中观察出哪两个三角形相似。特别是面对稍微复杂的几何图形，从线段复杂的图形中抽出两个相似三角形的基本结构，对很多学生来说时有难度。这就要求教师在教学中一定要立足基本图形的分析与理解，能够通过简单的基本图形推导出结论。在这一方面教师要给与充足的时间去思考，去消化，面对学生提出质疑，教师一定要及时解答，并及时调整好教学策略。在课堂教学过程中让学生亲身参与学习，多角度去发现基本图形的本质特征，加强对基本图形的理解。比如在直角三角形中，作斜边上的高。在没学习相似三角形之前，学生看到这个图形关连到知识点是勾股定理，三角形面积。但是学了相似后，教师要引导学生去观察三角形、线段之间的关系。这就是简单的图形中蕴含着丰富的数学知识。以后学生遇到直角三角形就会联想到相似三角形，线段之间的关系，学生的知识体系进一步得到完善。数学关键能力的发展是立足了基本图形的分析与理解，有了基础才能生成数学分析问题和解决问题的能力。

#### 2. 对基本图形进行联想与构图，发展模型观念

随着学业水平考试改革的逐渐推进，以核心素养为导向，重视数学知识结构化，加强了学科之间的融合。这一变化说明社会对学生的综合应用能力的要求越来越高。教师知识站位由数学学科知识转向数学与其他学科知识融合，引导学生注意到不同知识间的联系性，搭建完整的认知图式，以促进对数学知识的整体把握。

在教学过程中，教师要提出能够引发学生积极思考的问题，让学生看到基本图形之后能够产生丰富的联想，从而让知识立体丰富起来。让学生感受到“看山不是山”。数学知识的考查都带有情境，带有条件，而数学模型是去掉了旁支，光秃秃地立着。因此，在学习数学模型的时候，就要引导学生发挥自己的想象力，会对基本图形进行构图。有些题目为什么会有难度，是因为问题呈现的结构不完整，知识的逻辑起点和终点需要多个知识点串联起来才能达到闭环。因此发展学生对基本图形的联想与构图能力至关重要。可以从识图→拆图→补图→构图引导学生对几何模型的理解，促进学生数学模型观念的培养。

#### 3. 丰富教学情境设计，让学生感受到数学模型的普适性

变式的思想是看山还是山，万变不离其宗。这与数学模型思想高度切合。每更换一个情境或更变一个条件，学生又回到了知识的起点——对知识感到陌生，需要再

次经历知识本质探究过程。这说明学生对知识的本质还没探究明、理解透彻，对所学的知识不会融会贯通。这就要求教师在教学过程中，引入丰富的教学情境，加强对基本图形的变式。如“一线三等角”在正方形中、在矩形中，在菱形中，在直角坐标系中，在二次函数中，在三角函数中等等这类的情境都要涉及，让学生感受到数学模型的普适性。变式教学可以说是学生获取知识的有效手段之一。特别是对模型教学，一线数学教师要研究学情、强化思想方法的渗透，发展数学关键能力。“一线三等角”模型的核心三角形内角和定理、平角的定义、三角形内外角之间的关系以及相似三角形的判定定理1。将数学模型放在学生熟悉的生活中，让学生感到到数学模型的普适应。

#### 4. 重视回归教材，深度挖掘教材母题的教育价值

教材是教师教育和学生学习所依据的材料，是学科总体设计的具体体现，反映了培养目标、教学要求、教学内容，同时又是课堂教学和测试的依据。许多试题都是从教材母题中的变式、转化、多个知识点的组合构成的。因此教师在教学的过程中，一定要注重教材内容解析的教学，让学生明白知识的本质，注重解题的通性通法。章建跃博士指出：“通性”就是概念所反应的数学基本性质；“通法”就是概念所蕴含的思想方法。解题教学中，注重基础知识及其蕴含的数学思想方法，才是追求数学教学的“长期利益”。重视教学过程，回顾教学本质。从数学学考题可以看出对于概念性内容考查比例的增多，不少考题都是可以在课本上找到原型，然后进行变式，探索出一般性的解题方法。

#### 结语

在核心素养导向下，从以前的强调“四基”到现在“四基”与核心素养关联性。从强调解题技巧到过渡到解决数学问题的过程中启发学生领悟其中蕴含的智慧源泉，才能让学生的数学学科素养落地生根。相似三角形判定定理的运用在现实生活中用处非常多，在教学过程中，教师始终保持以核心概念、核心定理为解题依据，揭示数学题中的本质，引导学生发现并熟悉知识背后的思想内涵。

#### 参考文献

[1] 义务教育课程标准(2022版)[M], 北京师范大学出版社.

[2] 章建跃. 注重通性通法才是好的数学教学[J]. 中小学数学(高中版) 2011(11): 50.

基金项目: 本文系江西省教育科学“十四五”规划课题《通过初中数学“变式教学”培育初中生模型观念的实践研究》(课题编号: 23JYB139)的研究成果。