# 探究直角三角形在特殊关系下证明全等的方法
## ——以几何与代数两种方法为例

喻味一　孙如蔓　贾翼远
南京市金陵中学仙林分校中学部

**摘　要：**在直角三角形全等证明的深入探索中，我们不仅利用传统的几何证明方法，还巧妙结合了代数工具，特别是通过勾股定理和平方差公式的应用，展示了数形结合思想的强大魅力。本文不仅分析了直角三角形在几种特殊关系下的全等证明方法，还通过实际例题详细阐述了如何运用几何构造与代数运算相互辅助，以解决复杂的几何与代数综合问题。围绕数形结合方法进行解析设计。突出以数助形、以形助数的方法不仅提升了学生的解题能力，给日后复杂的代数与几何综合题作铺垫，也为后续更高级的数学学习奠定了坚实的基础。

**关键词：**几何问题；解题方法；几何代数化；初中数学
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2024.11.065

引言

在数学的广阔天地里，几何与代数作为两大基石，相辅相成，共同构建了数学世界的宏伟殿堂。八年级的数学课程，特别是平行四边形与一次函数的学习，为我们打开了数形结合的大门，让我们初步领略到了这一思想方法的魅力。而在直角三角形的学习中，勾股定理的引入更是将几何与代数的联系推向了一个新的高度。本文旨在通过具体实例，深入探讨直角三角形在特殊关系下的全等证明方法，进一步挖掘数形结合思想在解决数学问题中的巨大潜力。

本文接受了许多关于平行四边形与一次函数的研究，在函数与几何的数形结合思想方法方面受益良多。在学习直角三角形的过程中，我们瞻仰到了一个伟大的定理——勾股定理，通过这个定理我们可以用几何和代数的两种方法来较为轻松地解决问题。所有，我们以此为切入点，深入地展开了一次研究。

**一、我们可以先构造一个简单的直角三角形，然后赋予它一定的条件，如例 1**

例 1.

在Rt△ABC和Rt△A′B′C′中AB=A′B′，C△ABC=C△A′B′C′，求证△ABC≌△A′B′C′

几何方法：

解：

延长BC至D，使AC=CD

延长B′C′至D′，使A′C′=C′D′

∵C△ABC=C△A′B′C′，AB=A′B′

∴A′C′+B′C′=AC+BC

∴BD=B′D′

由此可证△ABD≌△A′B′D′

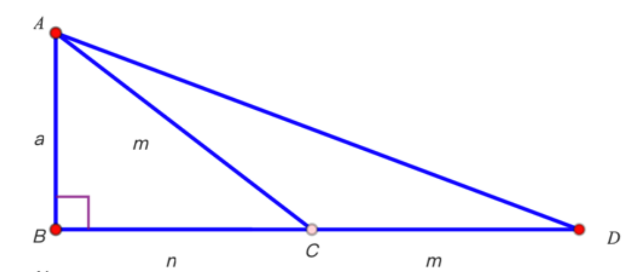
∴∠D=∠D′，∠BAD=∠B′A′D′

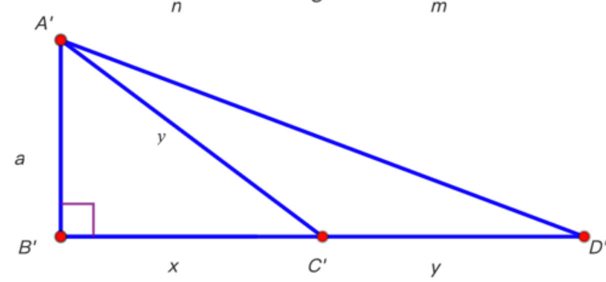
又∵A′C′=D′C′, AC=CD

∴∠DAC=D′A′C′

用∠BAD-∠CAD，∠B′A′D′-∠C′A′D

∴∠BAC=∠B′A′C′




在△ ABC 与△ A′B′C′

$$\because \begin{cases} \angle BAC = \angle B'A'C' \\ \angle ABC = \angle A'B'C' \\ AB = A'B' \end{cases}$$

∴△ ABC ≌△ A′B′C′

几何方法深化

在例 1 的几何证明过程中，我们巧妙地通过延长线段、构造全等三角形等几何变换，使用两次全等三角形的判定 SAS 与 AAS 得出结果。实现了从已知条件到结论的推导。这种方法不仅考验了我们的几何直观能力和构造技巧，还让我们深刻体会到了几何证明中的逻辑严谨

性。为了进一步深化理解，我们可以考虑将这种方法应用于更复杂的图形中，比如添加更多的直角三角形或平行四边形,通过构建更多的辅助线,探索更多的全等关系。

代数方法：

解：

设AB=A′B′=a，BC=n，AC=CD=m，B′C′=x，A′C′=C′D′=y

∵C △ABC=C △A′B′C′

∴AB+BC+AC= A′B′+B′C′+A′C′

即a+n+m=a+x+y

∴n+m=x+y （记为①）

在Rt △ABC 中，∠ABC=90°

∴$m^2-n^2=a^2$

同理$y^2-x^2=a^2$

∴$m^2-n^2=y^2-x^2$ （记为②）

由①和②可得

(m+n)(m-n)=(x+y)(x-y)

又∵① n+m=x+y

∴③ m-n=x-y

① + ③得

2m=2y

m=y

即 AC=A′C′

易得△ ABC ≌△ A′B′C′(HL)

如果我们利用代数的方法，就可以从勾股定理与平方差公式中得到数量关系。下面我们将这个模型继续深化。如例 2

例 2.

在△ ABC 中 AD ⊥ BC，且 AB+BD=AC+CD，求证 AB=AC

几何方法：

有△ BAD，△ CAD，∠ ADC= ∠ A′D′C′=90°

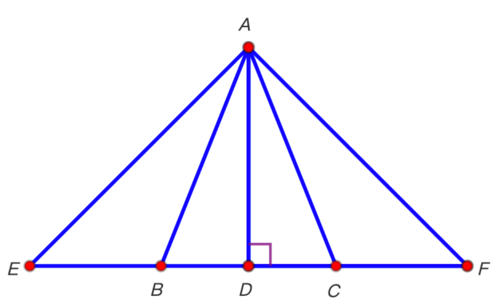
解：

延长 DB 至点 E，使 BE=AB

延长 DC 至点 F，使 CF=AC

∵ AB+BD=AC+CD

∴ BE+BD=CF+CD




即 ED=FD

得△AED≌△AFD（SAS）

∴∠E=∠F，∠EAD=∠FAD

又∵BE=AB

∴∠E=∠EAB

同理∠F=∠FAC

易得∠BAD=∠CAD

在△BAD与△CAD中

$$\because \begin{cases} \angle BAD = \angle CAD \\ AD = AD \\ \angle ADC = \angle ADB \end{cases}$$

∴△BAD≌△CAD（ASA）

代数方法：

解：

设 AB=x，BD=y，AC=m，CD=n

由题得

x+y=m+n （记为①）

在 Rt △ ABD 中，∠ ABD=90°

∴ $x^2-y^2=AD^2$

同理 $m^2-n^2=AD^2$

∴ $x^2-y^2=m^2-n^2$ （记为②）

由①和②得

(x+y)(x-y)=(m+n)(m-n)

又∵① x+y=m+n

∴③ m-n=x-y

① + ③得

2m=2x

m=x

即 AB=AC

从例 2 中我们可以发现，他们的本质都是利用直角三角形的性质和平方差公式来解题，只不过例 2 是由两个例 1 图形拼合而成的，那我们可以利用从这两个问题中所获取的经验。改变我们之前赋予它的数量关系将研究进一步深入。

例 3.

在Rt△ABC和Rt△A′B′C′中，AC=A′C′，BD、B′D′分别为AC、A′C′边上的高，且BD=B′D′求证△ABC≌△A′B′C′

几何方法：

解：

做△ ABC 与△ A′B′C′ 取斜边中点 E，E′，AC=A′C′

∵在 Rt △ ABC 中，∠ ABC=90°，BE 为 AC 中线

∴ CE=BE= $\frac{1}{2}$ AC

同理 C′E′=B′E′= $\frac{1}{2}$ A′C′

∵ AC=A′C′

易得△BDE≌△B′D′E′（HL）

∴∠DEB=∠D′E′B′

∵CE=BE

∴∠EBC=∠ACB

同理∠E′B′C′=∠A′C′B′

∵∠EBC+∠ACB=∠DEB

∠E′B′C′+∠A′C′B′=∠D′E′B′

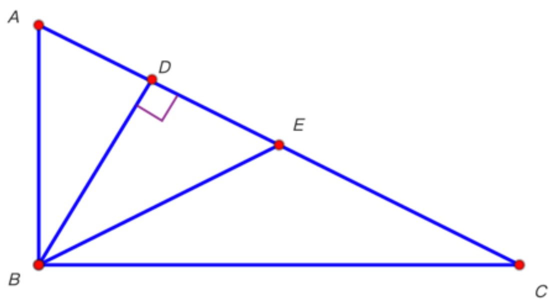
且∠EBC+∠ACB=∠DEB

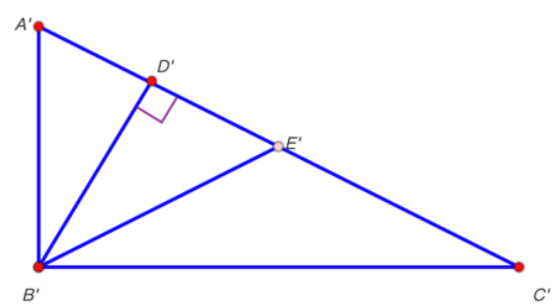
∴∠ACB=∠A′C′B′

在△ABC与△A′B′C′中

$$\because \begin{cases} \angle ACB = \angle A'C'B' \\ \angle ABC = \angle A'B'C' \\ AC = A'C' \end{cases}$$

∴△ABC≌△A′B′C′(AAS)




代数方法：

解：

设 AB=m，BC=n，A′B′=x，B′C′=y

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{mn}{2},\ S_{\triangle A'B'C'}=\frac{A'C'\cdot B'D'}{2}=\frac{A'B'\cdot B'C'}{2}=\frac{xy}{2}$$

$$\therefore \frac{mn}{2}=\frac{xy}{2}$$

即 mn=xy （记为①）

在 Rt △ ABC 中，∠ ABC=90°

∴ $m^2+n^2=AC^2$

同理 $x^2+y^2=AC^2$

∴ $m^2+n^2=x^2+y^2$ （记为②）

由①和②得

m+n=x+y （记为③）

易得④ m-n=x-y

③＋④得

2m=2x

m=x

即 AB=A′B′

∴ n=y

即 BC=B′C′

∴△ ABC ≌△ A′B′C′(SAS)

从例 3 中我们又有了新的发现：直角三角形的斜边中线定理，又可以为我们用几何方法提供帮助。而代数方法我们又利用的完全平方公式和勾股定理得到等量关系。

数形结合思想的核心在于将抽象的代数运算与直观的几何图形相结合，通过相互转化、相互辅助，达到解决问题的目的。在直角三角形全等证明的实践中，我们深刻体会到了这一思想的重要性。无论是通过几何构造来辅助代数运算，还是通过代数方程来揭示几何关系，都体现了数形结合思想的精髓。在未来的数学学习中，我们应该更加注重培养自己的数形结合能力，善于将这两种方法结合起来，以应对更加复杂多变的数学问题。

**结语**

经过对以上几个例题的共同探索与研究，我们对直角三角形的性质于相关定理得到了深刻理解和充分应用。在这个图形中，我们也得以从几何和代数两个角度全面地考虑了问题，在对于不同方法的探讨和研究中，我们更牢固地掌握了所学的知识，丰富了我们考虑问题的视角，充分感觉到了数学的魅力。然而，数学的世界是无穷无尽的，我们所掌握的知识和方法只是冰山一角。在未来的学习和研究中，我们应该继续保持好奇心和探索精神，不断拓宽自己的知识视野和思维边界。同时，我们也期待有更多的学者和专家能够加入到这一领域的研究中来，共同推动数学科学的发展和进步。

**参考文献**

[1] 罗燕婷，初中几何代数化教学的思考——基于圆中角转化问题 [J]. 西部素质教育 ,2022(3):186-189.

[2] 赵海龙，浅谈初中几何问题的解题方法 [J]. 中学数学教学参考 ,2019 年 .18 期：52-54.

[3] 李瑞枝，初中阶段几何与代数的融合教学 [J]. 中学数学研究（华南师范大学版）,2015 年 .16 期：15-17.