高考中的数形结合

王馨

天津市第三中学

摘　要：高中数学有三大数学思想，化归思想，分类讨论思想和数形结合思想。其中数形结合思想在高中数学教学过程中有着举足轻重的地位，基于此，本文对高中数学中数形结合思想的应用进行了简单的分析和举例。

关键词：数形结合思想；高中数学；应用

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2025.01.068

引言

数学这门自然学科的逻辑性非常强，在繁杂的知识结构和知识点中，学生要想有解题思路，并且能找到正确的解题思路，还能顺藤摸瓜的做出来一部分或者都写出来，着实不易，所以做数学时毫无章法，望而却步。教师带着学生用高中数学的三大思想（化归思想，分类讨论思想，数形结合思想）之一数形结合思想解题，可以帮助学生有效解决数学问题，利用数与图的结合，可直观地看到数与图的各种关系，形象的思考，便于定性的分析，定量的计算，使解题思路更加清晰，既使学生的逻辑思维能力得到培养又使学生的学习兴趣得到提高，还让学生的学习习惯水到渠成的养成了。让学生看到数学的根本所在，让学习数学成为一种享受，达到“知之者不如好之者，好之者不如乐之者”，让学生爱上数学，以学数学为乐。

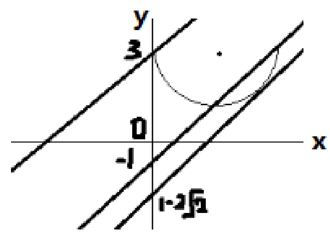
一、数形结合思想的提出

在高中数学直线和圆，圆锥曲线这一部分内容中，我们经常用代数法和几何法相互转换来解决问题。代数法是始于“数”用计算解决问题、几何法依托于“形”看图说话，这两种方法互相补充，配合得惟妙惟肖。

例如：若方程 x+b $=3-\sqrt{4x-x^2}$ 恰有两个根，求 b 的取值范围。

解：经过初步分析这道题用纯代数方法解方程，有一定难度，其中还涉及根的分布问题，我们直接转化成直线 y=x+b 和曲线 y $=3-\sqrt{4x-x^2}$ 的交点问题来解决，依据数形结合思想，借助函数 $=3-\sqrt{4x-x^2}$ 图像，这个代数问题就迎刃而解了。

（几何法）函数图像是方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 的下半圆（$(1\le y\le 3)$），b 是直线 y=x+b 的纵截距。于是我们画出图像，直线与曲线有两个交点时，由图形：可得：$1-2\sqrt{2}<b\le -1$，



具体解法：函数 y $=3-\sqrt{4x-x^2}$ 可以整理成 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$（$y\in[0,3]$），表示为圆心是（2，3），半径为 2 的圆的下半圆，把下半圆右端点求出，是（4，3），将其代入 y=x+b，解得 b=−1，此时直线与圆有两个交点；又利用直线和圆只有一个交点也就是相切时，若用代数方法联立 $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=4\\ y=x+b\end{cases}$，计算判别式等于 0，求出 b，运算量有点大，但是如果采用几何方法，利用点（2，3）（圆心）到直线 y=x+b 的距离等于半径 2，解得 b=1+2 $\sqrt{2}$ 或者 b=1−2 $\sqrt{2}$，根据图形舍掉大的，留下 b=1−2 $\sqrt{2}$，所以 $1-2\sqrt{2}<b\le -1$。

本来一道利用代数法是你很难解决的题，还包括解无理方程，学生得分率会很低，但是利用几何法，利用方程的根等价于函数零点等价于两个函数图像交点横坐标就能使问题简单化，直接看着图像得出结论，很抽象的问题跃然纸上，甚至动态的画面感都有了，学生理解起来非常方便，做起题来得心应手。

二、数形结合思想的概述

数与形是代数和几何的代表，高中数学又分成代数和几何两块，一个与计算结合，一个与看图结合，计算出数据，看图得到结论，两者相辅相成。我们拿到一道数学题，看是否是纯粹的几何题，比如平面或者立体几何，或者是概率统计这样的纯粹的代数问题，如果经过判断，分析它的条件和结论，找到他们内在的联系，题目中既有“数”又有几何图“形”，将“数”的信息转化成函数图像，学生“看图说话”，把“形”的问题，平面立体几何利用坐标系，利用平面空间向量转化成运算，或者通过构造函数，抓出代数含义这一关键，由此将数量关系和直观图形灵活地结合起来，通过这种转换，

得到解题思路，这就是贯穿我们高中数学始终的数形结合方法。

数形结合这种重要的思想方法，包括“看图出数”“借数画图”两个方面，其本质是把抽象难理解的数学语言和已经学过的简单直观的几何图形，函数图像关联起来，实现代数，几何相互转化，使其两者相得益彰。我们在使用数形结合思想解决问题时要注意以下几点：第一，认真审题，找出数学概念，数学运算的几何意义，函数的图像，曲线方程的数学特征，画出几何图形或者函数图像，画图；第二恰当合理的设好参数，中间变量，换元，从图形入手，做好看图计算相结合；第三是正确确定参数和新元的取值范围。

三、数形结合思想解题方法指导

（一）转换数与形的三条途径

1. 通过坐标系的建立，引入数量化静为动，以动求解。

2. 审题，通过分析题意，迅速分出是否可以用数形结合，根据式子的特点，转化问题角度，如将方程转化为图形的一部分或将两条曲线联立成方程等等。

3. 各种构造，构造一个平面几何图形，构造一个函数或者分段函数如果构造的函数较为复杂，再简单地进行化简运算，重新构造新函数等。

（二）运用数形结合思想解题的三种类型及思维方法

1.“从数到形”：根据已知条件画出相应的图形或者函数图像，从图形中反映出它们数量关系，一目了然体现出题目中知识点的本质特征。

2.“看形写数”：就是根据所给的图形（或者已知条件中的信息），认真揣测图像性质，计算出相关的基本数据，由图像得出一些小的结论，把小结论汇总得到完整答案，使知识点内在的联系充分体现。

3.“数形结合相互转化”：就是看图说话，看图算数，把算得的结论，结果再标注在图上，将数与图相互转换，化抽象为具体，化繁为简，从而把题做出来。

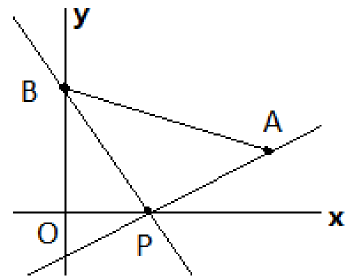
四、数形结合思想方法的应用

（一）化静为动用图像

例 1　已知点 P(1，0) 在直线 l 上，且 l 与线段 AB 有公共点，其中点 A(2，1),B(0, $\sqrt{3}$)，求直线 l 的斜率 k 的变化范围。

分析：题中直线 l 是一条过定点 P 的动直线系，而线段 AB 是一条定的线段，要使直线l与线段 AB 相交，可先找到l过一个临界点 A 的斜率，再找到l过另外一个临界点 B 的斜率，从运动观点促使直线l的斜率在某一范围内变化，从而可求实数 k 的取值范围。

解：解题过程，我们只需要算两个斜率，k 变化范围见图



$$k_{PA}=\frac{1-0}{2-1}=1,k_{PB}=\frac{\sqrt{3}-0}{0-1}=-\sqrt{3}$$

$$k\geq 1\text{或者}k\leq -\sqrt{3}$$

评注：直线恒过定点问题，可以转化为直线的旋转问题，此类题目一般结合图形化静为动，以动求解，可判断出斜率的取值范围。

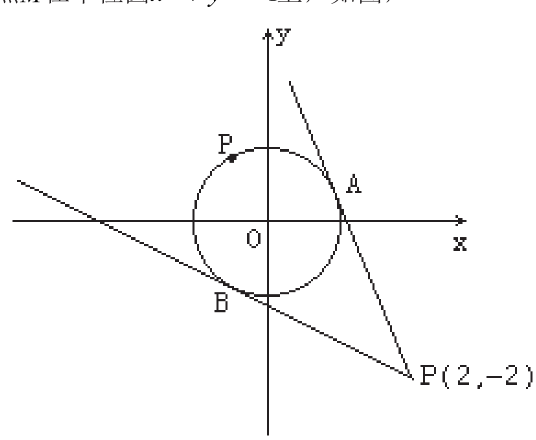
（二）破解疑难构图像

例 2　已知（x, y）在$x^2+y^2=1$圆上，求$\dfrac{y+2}{x-2}$取值范围。

分析：此题可看成过圆上动点M（x, y）与定点$P(2,-2)$构成直线斜率的取值范围的问题，然后可以求表达式的取值范围。

解：$\dfrac{y+2}{x-2}$的形式类似于斜率公式$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\dfrac{y+2}{x-2}$表示过两点M（x, y, ）构成直线$P(2,-2)$斜率，由于点M在单位圆$x^2+y^2=1$上，如图，



显然$k_{PA}\leq y\leq k_{PB}$，设过P圆的切方程为$y+2=k(x-2)$

则有 $\dfrac{|2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ 解得 $k=\dfrac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$ 即

$$k_{PA}=\frac{-4-\sqrt{7}}{3},\ k_{PB}=\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$$

$\frac{-4-\sqrt{7}}{3}\le k\le\frac{-4+\sqrt{7}}{3}$则$\frac{y+2}{x-2}$的取值范围为

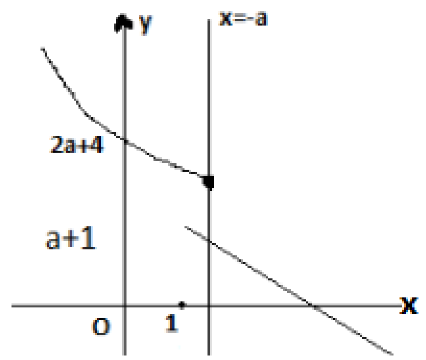
$$\left[\frac{-4-\sqrt{7}}{3},\frac{-4+\sqrt{7}}{,3}\right]$$

评注：本题求圆上的动点与定点构成直线的斜率，考查学生斜率公式逆用，有参数有确定点，透过现象看本质，通过已知数据，画出相应的图像，变难懂的数量关系为“形”，精准浅显地展现出来，使得学生上手特别快，能得分。

（三）寻求正解配图像

例 3　已函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+3,x\le1\\ax+1,x>1\end{cases}$是减函数，求实数 a 的取值范围

依图$\begin{cases}1\le-a\\f(1)=1+2a+3\ge a+1\end{cases}$解得$-3\le a\le-1$像得

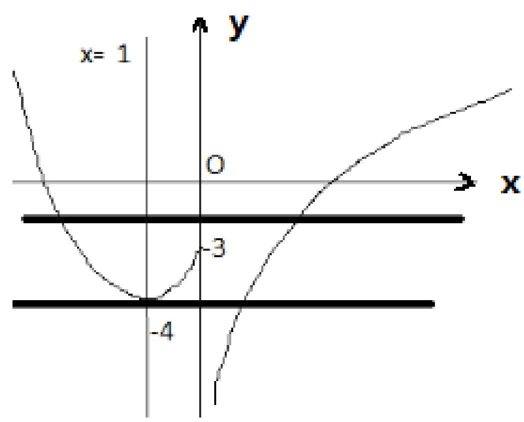


评注：解决这类问题不要着急，不要慌张，先画出含有参数（对称轴方程 x=-a）的二次函数有效图像，对称轴方程含有参数 a，所以二次函数的位置就需要试画，又因为分段函数的 x 的分段点是 1，所以就出现了，-a 在 1 的左边（-a<1）或者 -a 在 1 的右边（-a>1）两种情况，然后依据整个函数 f(x) 在 R 上减，则直线的有效部分需在二次函数的下方，找出关键点 x=1，1 这点的函数值二次函数的需要比一次函数的大，列出不等式组，轻松求解，把数形结合体现得非常完美。

（四）画其图像得结论

例 4　$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\le0\\-2+\text{h}\ x,x\succ0\end{cases}$，若使方程 f(x)=k 有两个不等实数根，求 k 的取值范围。

解：直接画出分段函数的图像，找出 f(x) 与 y=k 有两个交点时的 k 的位置，直接给出答案$\{k|k=-4或k\succ-3\}$



评注：本题是方程的根，函数零点，两个函数图像交点横坐标相互转化最好的例子，拿到题，分析条件看看是直接解方程好，还是画图看图像更加便捷，迅速作出判断，此题借助函数图像，转化为两个函数交点 = 横坐标，移动 y=k. 数交点更加轻松、容易。

结语

总之，数形结合思想是高中数学最基本的思想之一，在解题中无疑是必不可少的，它以灵活的方法和技巧帮助我们解决好多问题，特别是在解决选择、填空题时发挥着很神奇的作用，让复杂的问题简单化且易于理解，抽象的问题具体化。数学家华罗庚曾指出：“数缺形时少直观，形少数时难入微。”数形结合这一思想方法我们其实在不自觉地一直用着，把图像、图形、数学符号等相互结合研究学习，可以将数学中的代数与几何结合起来，进行相关性学习，拿到一个题，画出图像，构造出函数，看着图，写着过程，翻译着信息点，再标注，再配合着分类讨论，画面感十足，简直把做题当作一种享受，同学们一针见血地找到数学问题的本质，给出精准答案。在日常的做题过程中，随时把运算和画图结合起来，加强训练，达到事半功倍的效果，让孩子们爱上数学，为自己的人生加分添彩。

参考文献

[1] 刘小勤 . 浅谈高中数学教学中如何渗透数形结合思想 [J]. 数理天地 (高中版), 2024, (15): 80-82.

[2] 徐俊 . 数形结合思想在高中数学教学应用研究 [C]// 北京国际交流协会 .2024 年第三届教育创新与经验交流研讨会论文集 . 重庆市酉阳第二中学校 ;, 2024: 3.

[3] 吴雪梅 . 借助数形结合思想 , 推动高中数学解题教学 [J]. 数理天地 (高中版), 2024, (11): 96-97.

[4] 李斌 . 探究数形结合在高中数学解题中的运用 [J]. 数理天地 (高中版), 2024, (09): 85-86.