双减背景下初中数学二次函数最值问题阅读指导实施策略

安振永

内蒙古呼伦贝尔市鄂伦春自治旗克一河中学

摘　要：二次函数是初中数学教学中的核心和难点，也是中考的重点考点，它复杂多样的特点使教师和学生一起克服这一困难具有相当大的挑战性。二次函数的内容不但涉及面广，而且形式灵活多样，要找到其内在规律及解题技巧并非易事。再加上最值问题的提出，更使学习难度进一步加大，学生心理负担过重。有鉴于此，本文精心挑选具有代表性的最值求解问题来训练学生，旨在培养他们的数学思维能力，进而提升解题能力和应试技巧。为了给广大教师提供一个行之有效的教学策略。

关键词：初中数学；二次函数；最值问题；阅读指导

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2025.01.216

引言

在初中数学这片广阔的天地中，二次函数的出现无疑具有里程碑意义。它在代数和几何之间既担负着桥梁的作用，又是解决现实问题强有力的工具。尤其对于二次函数最值问题，同学们既要有坚实的理论基础又要有敏捷的思路与精巧的解题策略。此类题不仅经常出现于各种考试之中，而且还是现实生活中优化决策和资源配置的数学模型依据。但对很多初中生来说，二次函数最值问题常常显得比较抽象和捉摸不透。在双减教育的大背景之下，如何能够有效地引导学生去理解和掌握这一数学难题，已经变成了作为数学教师所面对的一项重大挑战。

一、二次函数基础知识回顾

（一）二次函数的定义与形式

在初中数学课程中，二次函数是一个核心概念，它的定义与形态为提供了理解和运用它的基石。通俗地说，二次函数就是与自变量 x 有关的二次多项式，其一般形式为 $y=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$。这是因为当 a=0 时，该函数将退化为一次函数，失去二次函数的特性。除了一般式，二次函数还有另外两种重要的形式：两根式（交点式）和顶点式。两根式主要描述了二次函数与 x 轴的交点，即一元二次方程的根，形式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1 和 x_2 是二次函数与 x 轴交点的横坐标。而顶点式则突出了二次函数的顶点坐标，形式为 $y=a(x-h)^2+k$，其中 (h, k) 是二次函数的顶点坐标。

这三种形式虽然表达方式不同，但都是二次函数的不同表示方法，它们之间可以通过代数变换相互转化。把握好二次函数这 3 种形式及它们之间的变换，对深刻理解并灵活运用二次函数是非常有意义的。不管是解二次函数的数值，还是学习二次函数的图象及性质，或是解决二次函数有关的实际问题等，都需要熟练地掌握并应用好这三种格式。

（二）二次函数的图像与性质

1. 二次函数抛物线的开口方向（由 a 的符号决定）

抛物线作为数学上曲线的基本形式之一，它的开口方向通过它的标准方程 $y=ax^2+bx+c$ 中系数 a 来决定。这一特征是抛物线的一个基本属性，对认识与分析抛物线形状与行为非常关键。

具体来说，当系数 a>0 时，抛物线开口向上。它是指 y 值随 x 的增减而无限增加，从而构成一条向上张开的曲线。反之，当系数 a<0 时，抛物线开口向下。在此条件下随 x 的增减 y 会无限递减，从而构成开口向下的曲线。抛物线的开口方向不仅塑造了它的总体形态，同时也决定了它与 x 轴交点（即根）的特性。如开口朝上的抛物线可具有 2 个实数根和 1 个实数根或者没有实数根时，就依赖于它的判别式 Δ=b2-4ac 数值。类似地，开口朝下的抛物线遵循这一法则。

另外，抛物线开口方向与顶点坐标也有一定关系。对开口朝上的抛物线来说，它的顶点就是它的最低点；并且对开口朝下抛物线的顶点就是它的最高点。在求解优化，最大值，最小值等有关问题中，这一特性显得特别重要。

2. 二次函数顶点坐标和对称轴的计算

二次函数抛物线的顶点坐标和对称轴也可以通过抛物线的标准方程 $y=ax^2+bx+c$ 来计算。对于顶点坐标，可以使用公式 $(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a})$ 来计算。其中，$-\frac{b}{2a}$是顶点的 x 坐标，而，$c-\frac{b^2}{4a}$是顶点的 y 坐标。由这个公式可以得出，无论抛物线的开口方向如何，其顶点都位于这条特定的垂直线上，且其 y 坐标可以通过将 x 坐标代入原方程来计算。

对于对称轴，它是抛物线的一条垂直线，其方程为 $x=-\frac{b}{2a}$。这条线将抛物线分为两个对称的部分，即抛物线上的任意一点关于对称轴的对称点也在抛物线上。

3. 抛物线与坐标轴的交点

抛物线与坐标轴的交点，实际上对应着一元二次方程的解。对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，当它与 x 轴相交时，y=0，此时方程变为 $ax^2+bx+c=0$，求解这个方程得到的解，就是抛物线与 x 轴的交点的 x 坐标。同样，抛物线与 y 轴的交点，就是当 x=0 时，y 的值，即 c 的值。

再展开来讲，抛物线与 x 轴的交点个数，由一元二次方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 决定。当 Δ>0 时，方程有两个不相等的实数解，即抛物线与 x 轴有两个交点；当 Δ=0 时，方程有两个相等的实数解，即抛物线与 x 轴有

一个交点；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数解，即抛物线与 x 轴无交点。而抛物线与 y 轴的交点，总是存在的，且交点坐标为 (0,c)。这是因为无论 a、b 取何值，当 x=0 时，y 的值总是 c。所以抛物线与坐标轴的交点，可以通过求解一元二次方程和直接代入 x=0 来求得。这两个交点，对于理解和分析抛物线的形状及行为，具有重要意义。

二、二次函数最值问题阅读存在的问题

学生在讨论二次函数的最值时经常会涉及到繁杂的数学表达式及自变量取值范围等问题，需要读者有坚实的代数基础并能准确地认识与分析函数形式。但在实际解题时，自变量取值范围常常不直接给定，而需从题目实际意义出发加以推论，加大了解题难度。二次函数最值问题常常属于具有“条件约束”最值问题的范畴，此类问题既需要学生熟练掌握二次函数开口方向等基本性质、顶点坐标等也要求其具有分类讨论、数形结合等功能。但由于课本中对二次函数最值求法的介绍可能对此类问题涉及不够，致使学生遇到实际问题时易因为思维跳跃太大而不易理解。部分学生在阅读时并没有注意到在求解二次函数的最值时必须要结合函数图像做细致的分析，对图像缺乏一定的识别分析能力。图像分析自身存在一定抽象性，学生可能很难准确地抓住图像的关键信息而影响解题效果。

总之，目前二次函数最值问题读解中的主要问题是数学表达式繁杂，自变量取值范围确定困难，具有“条件约束”最值问题处理困难和图像分析能力欠缺。

三、二次函数最值问题解析

（一）最值概念与判断

最值概念作为数学上最基本、最重要的概念之一，涉及函数或者数列在给定范围内所能达到的最大或者最小值。最值概念被广泛应用于求解实际问题，如经济学上追求成本最小化或者利润最大化生产量以及工程学上对物料的最佳利用。判断某一数量是否是最值一般都要根据一些条件与规律。判断函数最值时，往往是先用导数求出函数极值点，然后再通过对比或者进一步分析判断出这些极值点就是最值点。在判断数列的最大值时，可能会采用数列的单调性、递推关系等特性来进行深入分析。具体运作中还要关注最值的存在条件。比如对闭区间内连续函数而言，按极值定理一定有最大值与最小值之分。但是对开区间或者非连续函数来说，这个结论也许不能成立。类似地，对数列而言，若数列中项数是有限的，则必有最大项与最小项之分；但是如果一个数列无穷大，就要更小心的去判断它有没有最值。

（二）求解二次函数最值的方法

1. 公式法

在求解二次函数最值问题时，公式法是一种直接而有效的方法，它依赖于顶点坐标的公式。对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，其顶点坐标可以通过公式 $(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a})$ 直接计算得出。由于二次函数的图像是一个抛物线，其顶点即为该抛物线的最高点（当 a<0 时）或最低点（当 a>0 时），因此也是函数的最值点。利用这一公式，可以迅速定位到抛物线的顶点，从而直接得出函数的最值。这种方法避免了繁琐的代数变换和图像分析，使得求解过程更加简洁明了。同时，它也体现了数学中“公式化”解题的思想，即通过记忆和应用特定的公式来解决问题，提高了解题的效率和准确性。

2. 配方法

配方法是一种在求解二次函数最值问题中常用的技巧，其核心思想是将二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）通过代数变换转化为顶点式 y=a(x-h)2+k，从而直接读出函数的顶点坐标 (h,k)，该点即为函数的最值点。

在具体解题时，一般式 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq 0$）中提取出 x2 的系数 a，并将常数项 c 单独放在等式的一边；接着，对 bx 进行配方，即加上和减去 $(\frac{b}{2a})^2$，使得等式左边成为一个完全平方的形式。这样，原式就转化为 $y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{b^2}{4a}+c$，进一步化简得到 $y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{4ac-b^2}{4a}$。此时，已经成功地将一般式转化为顶点式，其中 $h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$。由于顶点式直接给出了函数的顶点坐标，因此可以直接读出函数的最值。当 a>0 时，函数有最小值，且最小值为 k；当 a<0 时，函数有最大值，且最大值为 k。配方法不仅简化了求解过程，还能够更直观地理解二次函数的性质。

3. 对称轴代入法

对称轴代入法是妙地利用了抛物线的对称性这一核心性质。当面对一个给定的抛物线方程，并已知其上的一个点时，若要求解与该点关于抛物线对称轴对称的另一点，或者利用对称性简化计算过程，对称轴代入法便显得尤为关键。首先需明确抛物线的标准方程形式及其对称轴。对于形如 y=ax2+bx+c（$a\neq 0$）的抛物线，其对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$。若已知抛物线上一点 (x_1,y_1)，要求关于对称轴对称的点 (x2,y2)，则无需复杂计算，直接利用对称轴方程，有 $x2=-2\frac{b}{2a}-x_1$（因为两点的中点在对称轴上，且中点横坐标为两横坐标之和的一半）。由于抛物线关于对称轴对称，故 y2=y1（除非抛物线开口方向为水平，但这种情况较为特殊）。对称轴代入法不仅简化了计算过程，更深刻地揭示了抛物线的几何特性，使得在解决诸如求最值、交点、距离等问题时，能够迅速找到切入点，提高解题效率与准确性。因此，熟练掌握并灵活运用对称轴代入法，是解决抛物线相关问题的有力工具。

四、二次函数最值阅读指导实施策略

（一）案例分析法

案例分析法作为对具体现象或问题进行深入探讨的一种教学方法，萌发于“苏格拉底式教学法等”。这种方式的核心是以现实生活或作品中出现的典型事例为教学素材，指导受训者深入研究与分析，以获得具有普遍

性与一般性的法则与结论。案例分析法一般由案例背景描述，案例详细阐述，深入分析和结论与建议 4 大环节组成。在对案例背景描述环节，对个案进行了详细的描述，需要将个案的起因，经过及结果综合呈现出来，从而奠定深入剖析的基础。

例 1 某超市新引进了一种商品，其单件进货成本为 20 元。在市场推广阶段，销售人员发现商品的销售单价（设为 x 元）与销售量（设为 m 件）之间存在明确的函数关系，具体为 m=150-2x。同时，商品的销售单价被限定在 20 元至 40 元（包括 20 元和 40 元）的范围内。

为了最大化当日的销售利润，超市需要确定一个最佳的销售单价。销售利润（设为 W 元）可以通过以下方式计算：每件商品的利润是销售单价减去进货成本，即 x-20 元；销售量为 m 件，因此总利润为每件利润乘以销售量，即 W=(x-20)×m。

将 m=150-2x 代入上式，得到 W=(x-20)(150-2x)。展开并整理，得到 $W=-2x^2+190x-3000$。

这是一个关于 x 的二次函数，且二次项系数为负，因此函数开口向下，有最大值。为了找到这个最大值，可以将二次函数转化为顶点式。通过配方，得到 $W=-2(x-47.5)^2+1112.5$。

然而，由于销售单价的限制（20 元至 40 元），x=47.5 并不在允许范围内。因此，需要进一步分析，在允许的范围内找到使 W 最大的 x 值。观察函数 W=-2(x-47.5)2+1112.5，由于它是开口向下的，当 x 值从 20 增加到 40 时，W 值逐步增加。因此，在允许范围内，W 的最大值出现在 x 的允许范围的最大值。计算当 x=40 时，W 取得最大值，即 W 最大。

$W_{最大}$=(40-20)×(150-2×40)=20×70=1400 元。因此，当超市将该商品的单价定为 40 元时，能够使得当日获得的利润最多，最大销售利润为 1400 元。

（二）互动讨论法

互动讨论法作为一种有效而又具有启发性的教学手段，强调教师与学生，学生与学生间双向或者多向沟通。在这一方式下，教师已不再只是单一的知识传授者，而成为引导者、促进者。促使学生主动参与，积极思维，并通过设问，分享意见，质疑及反驳来共同探究知识的秘密。老师需要精心设计讨论的话题，这类话题通常都是与学生的生活实际相联系或者是与课程核心相联系的，目的都是为了引发学生的学习兴趣与好奇。然后，同学们分成小组或者在班上进行讨论，大家各抒己见，提出各自的看法与疑问。在讨论期间，老师及时进行指导，以保证讨论不会离题，也促使学生听取别人的建议，并学会尊重和宽容不同的看法。

互动讨论法在促进学生深刻理解和掌握知识的同时，也大大增强其沟通协作能力，批判性思维及创新能力。通过思维的撞击与整合，可以使学生从多角度，多层次去观察问题，从而形成一个较为全面而又深入的认知体系。另外，该教学方法提高了课堂参与度与趣味性，让学习过程更生动、有趣。

（三）总结归纳法

归纳总结法是一种重要的思维方法，它通过观察、分析具体实例，从中提取出一般规律或结论。总结归纳法的优势在于它能够帮助学生构建起知识的框架和体系，使零散的知识点串联成网，形成完整的知识链。同时，这种方法也促进了学生的记忆与理解，因为通过总结和归纳，学生需要深入思考知识的本质和规律，从而加深了对学习内容的印象。在解决二次函数最值问题时，可归纳总结为首先需要观察并分析具体的二次函数表达式及其图像，如 $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）。通过绘制函数图像或利用公式法，可以找到函数的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$，这是确定最值位置的关键。接下来，分析函数开口方向（由 a 的正负决定）和对称轴与定义域的关系。如果函数开口向上（$a>0$），且对称轴在定义域内，那么最小值就出现在对称轴上；如果对称轴不在定义域内，最小值则出现在定义域的端点上。反之，对于开口向下的函数（$a<0$），可以类似地找到最大值的位置。通过归纳总结法，得出以下一般规律：对于二次函数最值问题，首先要确定函数的开口方向和对称轴，然后根据对称轴与定义域的关系，结合图像或公式法，找到最值的位置。这种方法不仅适用于具体的二次函数问题，还可以推广到更广泛的函数最值求解中，体现了从个别到一般、从具体到抽象的归纳总结法的精髓。

结语

在双减政策的大背景之下，初中数学中二次函数最值问题的阅读指导策略对学生理解二次函数的最值问题由积极的作用。通过案例分析、优化课堂教学和归纳总结，使学生在掌握二次函数最值问题求解方法的同时，促进自主学习与解题。在今后的教学中，应不断深入探索，努力使数学自主学习和教学更符合教育规律和更接近学生的实际情况。相信初中数学教育经过广大教师和学生的共同努力，一定会绽放更灿烂的光芒，为促进学生全面发展打下坚实基础。

参考文献

[1] 何晓兰 . 初中学生数学阅读能力的培养途径 [J]. 基础教育论坛 ,2022.

[2] 唐强 . 基于核心素养培养的初中数学阅读题教学策略 [J]. 数学之友 ,2022.

[3] 李翠侠 . 初中数学教学中学生阅读能力培养策略分析 [C]// 廊坊市应用经济学会 . 对接京津——行业企业基础教育论文集 . 河北省永清县曹家务乡中学 ;,2022.

[4] 李慧琳 , 韩祥临 . 浙教版初中数学教材中数学史内容的分析与思考 [J]. 教学与管理 ,2022.

[5] 巧用“转化思想”解二次函数背景下三角形面积问题 [J]. 叶燕华 . 文理导航 (中旬),2021.