指向高阶思维的初中数学作业问题设计研究

刘玉红
深圳市新安中学（集团）第一实验学校

摘　要：问题是数学的心脏，好的问题是思维的源泉，本文着眼作业问题设计，从联结知识、关键知识、发散变式、巧借阅读设计问题，实现发展思维的灵敏性、深刻性、创新性的目标，拓展思维长宽高。近期笔者在阅读胡军《高阶思维与初中课堂》时颇受启发，在教学过程中低阶思维与高阶思维互为助推，低阶思维可以看作是面对教师布置的教学活动任务，学生以强化记忆的方式来获得的应用，做出的直接回答、直接操作；相较于低阶思维，高阶思维则意在培养学生的数学核心素养，数学高阶思维具备灵敏性、创新型、批判性。

关键词：初中数学；高阶思维；作业问题设计
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2025.02.208

一、联结知识创设问题，发展思维的灵敏性

目前初中数学作业设计中依旧存在很多问题，有的题目设计比较简单，对学生的锻炼不够，只是流于表面热闹，问题设计缺乏深度和探究价值，学生思维难以得到有效锻炼。有的问题难度大大超出学生能力，硬性拔高，从而导致探究无法进行下去，最终变成了知识的“填灌”，迫使学生机械记忆式学习，减少了学生主动思考机会，使得学生思维能力发展难以进行。教师在进行作业问题设计时，应从学生角度出发，在学生已有认识的基础上适当拔高，既启发思维，激发主动探索新知的积极性，又要增强学生对知识连贯性的体验，从而促进思维灵敏性的提高。

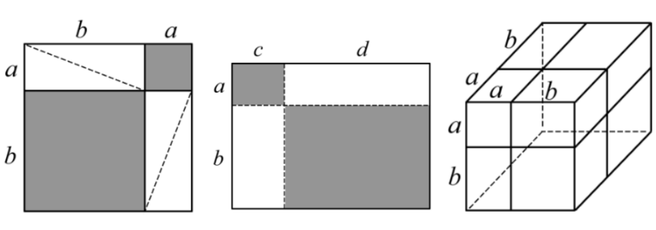
设计案例 1：

（1）图①是一个长为$a+b$正方形，请用两种方法表示阴影部分的面积；

方法 1：方法 2：

（2）观察图②，你能得出什么结论；结论：

（3）观察图③，写出结论并证明；结论：



图①　　图②　　图③

设计意图：

案例 1 的问题是在学习了北师大版七年级下册第一章第六节完全平方公式后所设计的作业问题。数形结合是认识数学的基本视角，是研究数学的常用方法。问题①通过折纸、剪裁、拼图活动，通过等量代换、等式性质来验证完全平方公式，将抽象的公式直观化，培养学生的抽象思维能力。图②则由特殊情况拓展到一般情况，长方形按类似操作进行知识迁移，由此来验证多乘多公式$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。图③是从平面到立体的拼接，是一个由面到体的过程，学生依旧用类似迁移验证$(a+b)^3$。本问题都是将代数知识赋予直观的几何意义，让学生从“冰冷”的数学符号中感受到“火热”，帮助学生在自我认知过程中建构新思维，用共通的方法联结问题，让知识发生自然生长。

二、关键知识点设问题，增强思维的深刻性

作业是学生和教师对话、和知识对话的无声载体，在设计作业问题时要秉承“最近发展区”的理论进行实际操作，把握问题的梯度，让学生能够有兴趣逐步去挖掘、探索、获得；设计连环的问题串一定要有内在联系，让学生能够感受到丝丝入扣式的诱惑，有效的问题设计要环环相扣，每问都能扣住所蕴含的关键知识点，突出问题的核心内容。因此在问题设计时，要求教师秉承设计初衷，明确问题所蕴含的知识本质，突出思维主线，有指向的进行问题的再延伸，让学生不仅仅是去模仿，更能让学生够感受到问题间的逻辑联系，帮助学生内化知识、突破原有认知局限、拓宽思维长度。

设计案例 3

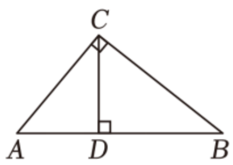
我们发现，“用不同的方式表示同一图形的面积”可以解决计算线段的有关问题，这种方法称为等面积法.

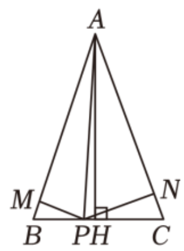
（1）如图 1，BC是AC边上的高，CD是AB边上的高，我们知道$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times$底×高，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=$______.

（2）如图 1，若$\angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，CD是斜边AB上的高线．用等面积法求CD的长．

（3）如图 2，在等腰三角形ABC中，$AB=AC=13$，$BC=10$，过A作$AH\perp BC$于点H，且$AH=12$，P为底边BC上

的任意一点，过点P作$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，垂足分别为M，N，连接AP，求$PM+PN$的值.





图④　　图⑤

设计意图：

等面积法是初中数学几何方面的重要方法，应用范围非常广泛，是学生解决问题的好武器；等面积法在北师大版本初中教材中并没有直接体现，等面积的知识内容设计应在学生学习直角三角形、三角形的高之后。

（1）问题的设计意在考察学生对“三角形的高”“三角形面积”知识内容的考察，用不同方式来表达面积是解决第（1）问的关键，推出等面积公式是本题的关键知识点；

（2）问题是对（1）问的进一步考察，通过勾股定理的应用可以求得斜边 AB 的长，再应用等面积法带入求值，既可以解决问题；

（3）问题不同于（1）（2）问，因为并没有出现直角三角形，问题又是求线段和，所以看似和前两问没有很多联系，这就给学生的思维发展设置了台阶，需要学生进行知识整理、构建，识别本道问题的关键知识点，有序推进思维发展。本问题的核心是“等面积法”而不是直角三角形，所以只要学生能够用不同的方式表达出△ ABC 的面积，就可以找到本问的突破口，从图形可以观察得到 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$，

$\because AH\perp BC$，$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，

$$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot PM+\frac{1}{2}AC\cdot PN,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times 10\times 12=\frac{1}{2}\times 13\cdot PM+\frac{1}{2}\times 13\cdot PN,$$

$$\therefore PM+PN=\frac{120}{13}.$$

学生数学思维的发展不在于知识结论的记忆，而在于学生们通过已有的旧知获得新知的过程探索，由此优化设计作业问题可以帮助课堂教学延续，让师生对话不止存于课堂，让知识生成不止限于课本，思维的发展构建帮助学生逐渐生成高阶思维能力。设计作业问题时，丝丝入扣的关键知识点渗透可以让学生理清思维，大胆尝试，在参与和感受困难问题时，有趁手的武器可以扫清思维障碍，通过猜测、剖析、探索等一系列的尝试解决问题，也完善了思维发展的过程，让思维拾阶而上。

三、发散变式再命问题，增强思维的创新性

数学问题与数学知识具有联接性，数学问题的探究与数学思维的发展相伴相生，在问题难度、层次、结构变化的过程之中，给学生创设了充足的探索空间，为学生发展高阶思维提供了舞台。发散变式再命制问题不能一蹴而就，要深刻挖掘数学问题的原理，分析问题的基本要素与整体结构，再从不同角度去改变问题的情境或者是条件，从而命制蕴含新数学背景、方法、结论的变式问题。设计数学变式问题是以“万变不离其宗”为核心主旨，以关注问题的发展与变化为要则，以增强学生思维创新性与主动性为目标。

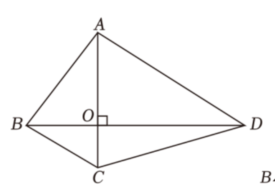
设计案例 4：

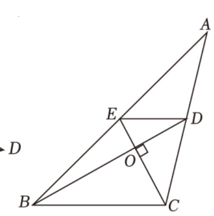
我们把对角线互相垂直的四边形称为“垂美四边形”，如图，已知四边形$ABCD$，$AC\perp BD$，像这样的四边形称为“垂美四边形”。

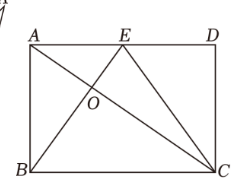
探索证明（1）如图⑥，设$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$AD=d$，猜想a^2，b^2，c^2，d^2之间的关系，用等式表示出来，并说明理由.

变式思考（2）如图⑦，BD，CE是ΔABC的中线，$BD\perp CE$，垂足为O，设$BC=m$，$AC=n$，$AB=k$，请用一个等式把m^2，n^2，k^2三者之间的数量关系表示出来：

变式思考（3）如图⑧，在矩形$ABCD$中，E为AD的中点，若四边形$ABCE$为“垂美四边形”，且$BC=2$，求AB的长.







图⑥　　图⑦　　图⑧

设计意图：

在初中的几何部分，主要侧重研究图形的结构和度量，偏好考察在图形变化的过程之中找到不变的性质和不变的量。

问题（1）中首先给出垂美四边形的概念，转化已知为几何符号语言，辅助给出图形中直观可见的边长的平方“a^2，b^2，c^2，d^2”，引导学生通过运用勾股定理来得到垂美四边形的结论。

学生解答：

（1）$a^2+c^2=b^2+d^2$；理由如下：

在RtΔAOB中：$OA^2+OB^2=AB^2$；

在RtΔAOD中：$OA^2+OD^2=AD^2$；

在RtΔCOB中：$OC^2+OB^2=BC^2$；

在RtΔCOD中：$OC^2+OD^2=CD^2$；

$\therefore AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$，

即：$a^2+c^2=b^2+d^2$；

问题（2）的变式训练，图形发生较大的变化，考察对新概念的理解和应用。学生要根据“垂美四边形”的概念来判断四边形 BCDE 为“垂美四边形”，再根据（1）中的结论和三角形中位线的性质来解决本题。问题（2）变式的设计，思维跨度相对较小，主要是鼓励学生们把握思维的方向，为学生继续探索增添动力。

学生解答：

（2）由题意得：$AB=2BE$，$AC=2CD$，

$\because BD\perp CE$，

$\therefore$四边形$BCDE$为“垂美四边形”，

由（1）可得：$BC^2+DE^2=BE^2+CD^2$，

即：$m^2+\frac{1}{4}m^2=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}k^2$，

整理得：$n^2+k^2=5m^2$；

问题（3）的变式训练相对会更综合一些，将图形变化和图形计算结合，学生需要找到题目中的“垂美四边形”，再结合矩形的性质、勾股定理、解方程得到答案。本小问让学生们感受到变式是自然发生的，通过观察、分析、推理、演绎、验证层层递进，不断推进思维的发展。从学生角度而言，扎实的知识系统是晋升数学思维的保障。

学生解答：

（3）由题意得：$AB=CD$，$AD=BC=2$，

$\because E$为AD的中点，

$\therefore AE=DE=1$，

$\therefore CD^2+DE^2=CE^2=AB^2+1$，

$\because$四边形$ABCE$为“垂美四边形”，

$\therefore AB^2+CE^2=AE^2+BC^2$，

$\therefore AB^2+AB^2+1=1+4$，

解得：$AB=\sqrt{2}$或$AB=-\sqrt{2}$（舍去）.

四、巧借阅读材料设问，拓展思维的长宽高

数与代数，图像与几何，统计与概率，综合实践是初中数学的四大板块，四部分内容互相穿插在初中学习的各个阶段，互为基石，逐步提升构建数学知识体系。在这样的知识安排背景下，综合性材料题备受青睐，也更能培养学生们应用知识解决实际问题的能力，为思维插上翅膀。比如 2024 年深圳中考数学 17 题，2023 年深圳中考数学 21 题都是以阅读材料为背景来命题的。

数学阅读材料的编制要抓准学生思维的起点，在教材的基础上深度挖掘，从背景介绍、原理剖析、问题引入、拓展应用逐渐递进安排。数学材料问题的作业安排有助于学生自学能力的提高，学生在阅读中经历感知、认读、假设、想象、推理、分析等过程，积极调动知识、发散思维、充实想象，实现思维的疯长，拓宽思维的长宽高。

设计案例 5：

阅读材料：“整体代入，解决问题”是数学中常见的方法，例如“已知$3a-b=2$，求代数式$6a-2b-1$的值。”可以这样解：$6a-2b-1=2(3a-b)-1=2\times2-1=3$。根据阅读材料，“整体代入，解决问题”：若$x=2$是关于$x$的一元一次方程$mx+n=4$的解，则代数式$4m^2+4mn+n^2+4m+2n-1$的值是_____。

设计意图：

本题考查了代数式部分的整体代入求值法，涉及的知识点为完全平方公式及一元一次方程解的定义，能把所求的代数式利用完全平方公式变形是解题的关键。学生经历阅读、分析、应用解决问题的过程，实现了思维的准备、思维的酝酿、思维的领悟、思维的完善的变化。

结语

作业是课堂的延续，精选优化每道题目可以减轻学生的课业负担，满足不同层次学生的需要，优秀的作业问题助力学生思维生长，实现低阶思维为高阶思维的转化。在编制作业问题时，不光要秉持目的性原则、层次性原则、应用性原则、主体性原则、发散性原则、探究性原则、整合性原则、创造性原则进行题目命制，还要注重联结知识点、突显知识关键点、发散变式、巧借阅读等命制作业问题，提高思维的灵敏性，增强思维深刻性，唤醒学生思维创造性，让思维疯长，生出血肉，拓展思维长宽高。

参考文献

[1] 教育部. 关于切实减轻中小学生课业负担的十项规定 [EB/OL]. 2000.

[2] 教育部. 义务教育数学课程标准 [M]. 北京：北京师范大学出版社 .2022.

[3] 龚含笑 .《高阶思维视域下数学变式教学的探索性实践——以“手拉手”模型专题探究为例》[J]. 上海中学数学 ,2023:1-2.