以形助数，以数解形
——浅谈“数形结合思想”在绝对值的最值问题中的应用

陈娟
上海宝山区世外学校

摘　要：“数”与“形”是数学中两个最基本的研究对对象。两者是紧密相连的，在一些特定条件下，两者是可以相互转化的，这就是“数形结合”。利用数形结合可以将抽象的、过难的、过繁的数学问题转换成形象直观的学习内容，使复杂的数学学习变得简单，出奇制胜。六年级下册有理数这一章节中，涉及含绝对值的代数式的最值问题对学生来说抽象且困难，本文重点探讨研究利用绝对值的几何意义以及数形结合思想，将抽象问题形象化，避免代数方法的多种分类讨论，简洁又高效地求得相关代数式的最小值。

关键词：绝对值；数形结合；几何意义；分类讨论；最值问题
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2025.03.210

引言

关于“数形结合”思想，著名数学家华罗庚曾说过：“数形结合百般好，隔裂分家万事休。”这句话充分体现了“数”与“形”两者密不可分的关系。“形”具有形象、直观、简洁的特点，而“数”具有严密、精确的特点。对学生而言，代数运算比较抽象，难理解，而图形的辨识非常简洁、直观，如果能挖掘出代数式的几何意义，由几何特征发现数与形的新联系，这样把代数问题转化为几何问题，求解过程就能变得简单，同时，借助于几何图形的直观性，便于学生理解与求解。

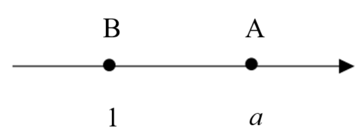
实际教学过程中，在运用数形结合的思想解题时，会先“以形助数”，帮助学生理解和分析题目中的代数条件和表达式，挖掘代数式的几何意义，以及求解问题所需的图像特征信息；然后再“以数解形”，利用有关的图像特征信息，读出几何元素的规律特征，列出简单易懂的“数”量关系，即可便捷地求解问题。

在六年级下学期第一章的教学中，我们发现学生在学习中碰到的第一个难题就是“绝对值”，其中包括绝对值的化简，当然，最难的当属求解相关代数式的最值问题。在课堂讲解过程中，我们发现即使是学习程度中上等的学生，依然在此类问题的求解中遇到较大困难，尤其是随着代数式中所含的绝对值数量越多，其求解难度会更大。

在正式讲解最值问题之前，我们需要进一步带领学生认识绝对值的几何意义。沪教版教材对于绝对值的定义是：“数轴上表示 a 的点与原点的距离，叫做数 a 的绝对值”。教材对于绝对值的定义就是从它的几何意义出发的，这也是学生从小学以来第一次接触到将一个代数意义的量用几何概念来定义，将其与“距离”这个几何意义的量相联系。

在学生理解了 $|a|$ 的基础上，我们来进一步引导学生理解更复杂的代数式的几何意义。学生已经学习过，数轴上表示数 a 的点与表示数 b 的点的距离记作 $|a-b|$，例如 $|6+3|=|6-(-3)|$，即表示，6 到 -3 之间的距离，即为 9。我们将紧紧围绕绝对值的几何意义，利用数形结合思想，直观便捷地解决此类问题。

（1）理解 $|a-1|$ 的几何意义，该代数式是表示数 a 的点与表示 1 的点的距离，在数轴上可以用线段 AB 来表示



（2）理解 $|a+1|$ 的几何意义，需要将 $|a+1|$ 写成 $|a-(-1)|$ 的形式，因此，该代数式表示数 a 的点与表示 -1 的点的距离，在数轴上可以用线段 AC 来表示

(3) 理解 $|a-1|+|a+1|$ 的几何意义，结合前两题，不难得出，该代数式的几何意义是表示数 a 的点与表示 1 的点的距离与表示数 a 的点与表示 -1 的点的距离之和。即线段 AB 和线段 AC 的距离之和。

在理解了上述代数式的几何意义之后，我们开始最值问题的讲解。

例题 1：求代数式 $|x-1|$ 的最小值

本题非常简单，学生可以从绝对值的非负性就直接得到，当 x=1 时，该式取最小值为 0。当然，也可以从几何意义出发，到数轴上表示 1 的点距离最小的点，就是 1 本身，此时距离为零。

例题 2：求代数式 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值

本题含有两个绝对值，解决此题可以有两种方法，代数法与几何法。

法一：代数法：

由于我们课堂上以及作业中都给学生讲解过“零点分段法”化简绝对值，其本质是分类讨论的思想，当 x 的取值范围不确定时，我们人为地将 x 分成不同的区间，进行分区间化简。多个绝对值的正负取决于 x 的取值，对 x 的取值进行分段讨论，需要先确定“零点”，即绝对值取值为0时 x 的取值，所以该方法叫作“零点分段法”。推广来看，有 n 个绝对值的式子就有 n 个零点，就会把数轴分成 n+1 段，题目就会分 n+1 种情况来讨论。本题有 2 个绝对值号，所以需要分 3 种情况。具体解法如下：

令 $x-2=0$，$x=2$；令 $x+1=0$，$x=-1$ 分三种情况讨论：

（1）$x\leqslant -1$ 时，原式 $=-(x+1)-(x-2)=-2x+1$，

随着 x 取值的增大，代数式的值在减小，因此这个区间内，最小值时当 $x=-1$ 时，原式 =3（2）$-1<x<2$ 时，原式 $=(x+1)-(x-2)=3$，

在此区间内，无论 x 如何变化，代数式的值都 =3，是个定值；

（3）$x\geqslant 2$ 时，原式 $=(x+1)+(x-2)=2x-1$ 随着 x 取值的增大，代数式的值增大

综上所述，当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，取最小值 =3

对于代数方法，优点很明显，思维严密，条理清晰，穷尽而不重复，能够较好解决绝对值问题。其缺点也很明显，过程复杂烦琐，不够形象，尤其是对于出初中学生来说，思维抽象能力不够高，往往能够做题而不能理解，甚至出现死记硬背的情况，这不利于数学素养的提升，也不利于为后续的学生打好基础。

法二：数形结合，几何法解题

代数式 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值，翻译成几何意义，就是表示数 x 的点与表示 -1 的点的距离与表示数 x 的点与表示 2 的点的距离之和，可以通过画线段图的方法直观地看到随着 x 的变化，距离之和的变化。本题中点 x 的位置右三种，见下图：

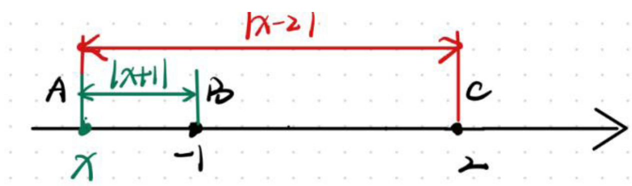


图 1

如图 1，当 $x<-1$ 时，即点 A 位于点 B 和点 C 的右边，此时距离之和 =AB+AC，随着点 A 向左移动，线段 AB 与 AC 的距离之和会越大。课堂教学时，利用几何画板演示线段的变化过程，

学生可以形象直观地体会到线段之和，也就是代数式取值的变化。当点 A 与点 B 重合时，距离之和最小 =BC=3

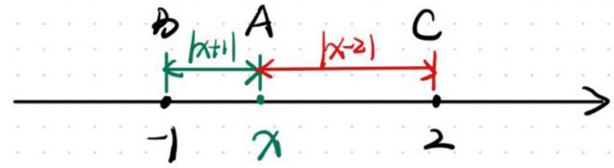


图 2

如图 2，当 $-1\leqslant X\leqslant 2$ 时，即点 A 位于点 B 和点 C 的中间，此时无论点 A 如何移动，我们发现 AB+AC 的线段之和总等于线段 BC 的长度，而 $BC=2-(-1)=3$.

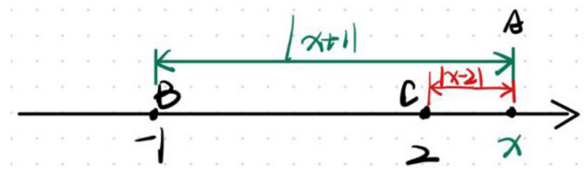


图 3

当 $X>2$ 时，即点 A 位于点 B 和点 C 的右侧，此时随着点 A 向右移动，线段 AC 与线段 AB 的长度都在变大，因此距离之和也会越大

综合以上三种情况可以看出，当点 A，也就是数 x 位于 -1 和 2 之间时，代数式取最小值。

对比代数方法和几何方法，不难看出，用数形结合方法求解最值问题，优势非常明显，形象直观，免去了繁复的分类讨论，可以直接得出答案。

另外，在此基础上，本题其实也引申一下，解绝对值方程：$|x+1|+|x-2|=2$

从几何意义上说，该题目翻译为：到 -1 和 2 两个数的距离为 2 的定点，有哪些？

我们已经知道，-1 和 2 之间的距离为 3，到 -1 和 2 之间最小距离的定点，存在于 -1 和 2 之间，也就是 3，即到一个数到 -1 和 2 之间的最小距离为 3，不存在满足距离之和为 2 的点．因此，该方程无解。数形结合，在这类题目中的优势得到非常明显的体现，直观简洁，不需要复杂烦琐的分类讨论，直接能够得出答案。

当然，刚才的例题 2 中只有含有两个绝对值，应用“零点分段法“分类讨论求最小值也还是可行的，数形结合方法仅仅是对代数方法的小改进，如果代数式含有 3 个以上绝对值，那就是思维的“跃进”了，按照“零点分段法”，有 n 个绝对值的式子就有 n 个零点，就会把数轴分成 n+1 段，题目就会分 n+1 种情况来分类讨论，显然时不实际的。如：含有 3 个绝对值的代数式，就需要分 4 种情况，花费时间不说，还容易出错，下面，我们用数形结合方法来求解这类题

例题 3：求 $|x-2|+|x+1|+|x+3|$ 最小值

目前绝对值增加到 3 个，根据前面分析，该代数式

的几何意义，即表示数轴上表示 x 的点到 -3，-1，2 这三个定点的距离之和最小。

此时，代数方法的分类讨论情况太复杂，我们来看几何法如何解题。

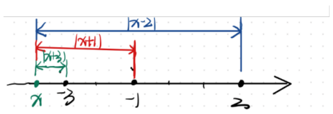


图 4

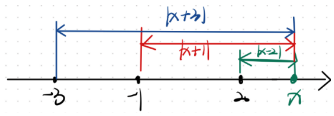


图 5

图 4 表示当 $x \leqslant -3$ 时，我们能看到距离之和为这三条线段的长度之和，随着表示 x 的点向左移动，距离之和会越来越大；图 5 表示当 $x \geqslant 2$ 时，情况与图 4 相似，随着表示 x 的点向右移动，线段会越来越长，距离之和也会增大。因此，最小值肯定不在这两个区间内产生。

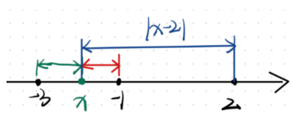


图 6

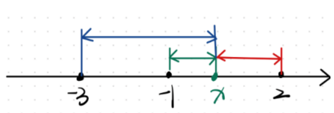


图 7

图 6 表示当 $-3 < x \leqslant -1$ 时，课堂教学时，应用几何画板可以动态演示线段的变化，可以发现，当 x 在 -3 和 -1 之间变化时，$|x+3|+|x+1|$ 的距离之和不变，但是 x 越接近 -1，$|x-2|$ 的距离在缩小，最小值在 x=-1 时取到；图 7 表示 $-1 < x < 2$ 时，同样可以发现 $|x-2|+|x+1|$ 的和不变，但是 x 越接近 -1，$|x+3|$ 的距离在缩小，最小值同样在 x=-1 时取到

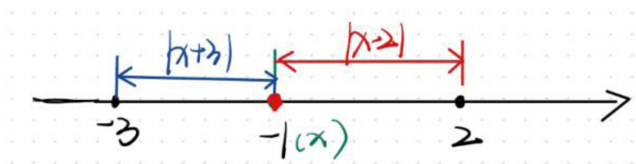


图 8

图 8 表示的就是当 x=-1 时的情况，不难发现，此时，各个线段的长度之和最小，因此，当 x=-1 时，$|x-2|+|x+1|+|x+3|$ 取最小值，最小值 =2-（-3）=5

我们再来反观一下例题 2 和例题 3，看看有没有什么规律呢？

例题 2 中含有两个绝对值，也就是说有两个零点，当 x 取值在两个零点之间时，代数式取最小值；例题 3 有 3 个零点，当 x 恰巧取到最中间的那个零点值时，代数式有最小值。那么我们可以启发同学来思考一下，当有 4 个，5 个，6 个，甚至 n 个零点时，代数式的最小值又有什么规律呢？可否由特殊到一般，进行推理猜测呢？在课堂教学中，可以将此类问题留作课后思考题，让学生自己动笔画图，发现并总结规律。

经过同学与老师的共同探索，应用数形结合的方法，我们得到了更一般的结论，求代数式 $|x-a1|+|x-a2|+|x-a3|+\cdots+|x-an-1|+|x-an|$ 的最小值（$a1<a2<a3\cdots<an$），当 n 为奇数时，则当 x 取最中间的零点，即 $x=a\frac{n+1}{2}$ 时，代数式取最小值；当 n 为偶数时，则当 x 位于最中间两个零点值之间时，代数式取最小值。

以上几个例子由浅入深，层层递进，让我们原本复杂的代数方法得到简化，利用数形结合方法求解绝对值问题，进一步引申到绝对值的最值类问题，可以极大降低题目难度，让学生理解更加形象生动，也使得原本无从着手的题目有的放矢。

总结来看，运用数形结合思想，使抽象的数学问题直观化、生动化，能够变抽象思维为形象思维，有助于把握数学问题的本质，易发现解题途径——即化难为易。运用数形结合思想，能避免复杂的运算与推理，大大简化了解题过程——即化繁为简。运用数形结合法解题的过程，有助于不断深化基础知识与技能的理解与应用，尤其是强化和提升对数与形之间对应关系的理解与应用能力。这些恰恰是很多同学在平时学习中比较薄弱的环节——或者是因为忽视了，或者是因为不善于系统学习与融会贯通。从这个角度来说，数形结合法除了是一种高效解题方法和思维方法，还是一种深化学习深度与提升综合能力的最有效学习方法之一。

结语

最后，作为老师，对学生的数学核心素养的培养，是我们的隐性教学目标。而数学学科素养的培养，要通过学科教学和综合实践活动来具体实施。我们不只是教会学生解答某一类具体的题型，不只是掌握特定的解题技巧，而是在知识学习的过程中，提高学生从数学角度发现和提出问题的能力，分析和解决问题的能力。在初中数学核心素养中，强调了学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析这六大能力，而数学抽象与直观想象的结合，也正与我们的“数形结合”思想不谋而合。通过“绝对值的最值问题”这样一个很小的切入点，笔者正是想要教给学生，如何实现复杂问题的转化，如何打破常规，利用几何方法，来解决代数问题，其中的探索过程，也正是发展学生分析问题，解决问题的能力的过程。

参考文献

[1] 武成城．数形结合思想在初中数学教学中的渗透分析 [J]．中学课程辅导．2021(37):205.

[2] 罗锐．巧用“数形结合”，提升学生思维力 [J]．小学教学研究．2013 (13):44-46.