

基于错误分析的绝对值解题困难成因及突破路径

黄小敏 黄华平

重庆三峡学院

摘要: 在数学领域中,绝对值作为基础性概念,在解题应用中非常具有挑战性,特别是初中阶段学生,刚刚接触到绝对值,会感到很困惑,解题的时候感觉难度很大。为了解决这方面问题,需要明确导致解题困难的原因,采取科学可行的策略。当学生系统化掌握解题方法,绝对值的解题能力就会提升,本论文针对基于错误分析的绝对值解题困难成因以及突破路径展开研究。

关键词: 绝对值; 错误分析; 解题困难; 成因; 突破路径

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2025.06.085

引言

在初中数学中,绝对值是非常重要的概念,包括代数、几何等等领域都会涉及这方面内容。但是,很多初中学生进行绝对值学习的过程中,会感到非常困惑,尤其是解题过程中,就会错误百出^[1]。对于这方面问题的有效解决,运用错误分析方法是比较有效的。学生掌握这种方法,绝对值解题过程中就会感到轻松。

一、绝对值解题中比较常见的错误以及原因

(一) 对绝对值概念没有正确理解

绝对值就是“一个数在数轴上与原点的距离”,其数学表达式为: $|x|$ 。绝对值看起来很简单,事实上有着丰富的内涵,涉及多方面学科,除了代数之外,还可以用几何表达。如果学生对于绝对值的理解停留在表面,对其本质不能深入掌握,解题的时候就会出现错误。这是因为很多初中学生刚刚开始学习绝对值,只能记住其数学表达式,不能正确理解其几何意义,当遇到问题的时候,不能对其性质灵活运用^[2]。比如,部分学生不能深入掌握绝对值性质,错误地认为绝对值结果为正数。由于这种上的偏差,使其计算题的时候,无论是方程还是不等式,其中含有绝对值,所得出的答案是错误的^[3]。

(二) 没有认识到绝对值的非负性

绝对值的一个重要性质,就是任意实数 x ,都能够得出一个结论,即 $|x| \geq 0$ 。这就意味着绝对值总是非负的,只有当 $x=0$ 的时候, $|x|=0$ 。但是,部分学生没有认识到这一点,进行数学解题的时候,忽视了“0”的问题,尤其是解决绝对值不等式的时候,对于这个性质不能正确使用^[4]。比如,不等式 $|x-3| < -2$ 的解题中,

部分学生没有认识到绝对值非负的性质,而是直接运算,最终得出的结论是没有意义的。

(三) 分类讨论的时候不够全面

当遇到绝对值问题的时候,首先要考虑变量取值范围,然后分类讨论。然而,许多学生进行分类的时候,会有疏漏,这就导致讨论的结果不够准确。比如,在解带有绝对值的方程 $|x-2|+|x+3|=5$ 的时候,学生讨论之前要先将数轴划分为多个区间,部分学生考虑不全面,在讨论的时候局限于一两种情况,解题所获得的结果缺乏完整性。

这部分知识重在培养学生的逻辑思维能力,培养学生的分类讨论能力。但是,部分学生的这部分能力不足,分类讨论不能系统化展开,思考问题不够全面,就会出现某些情况被遗漏或者重复讨论的现象,此为解题错误的重要原因。

(四) 没有重视绝对值的几何意义

绝对值的几何意义就是在数轴上的两个点之间距离。绝对值问题的理解可以多角度进行,比较常用的是代数角度和几何角度。通常而言,部分学生解题的时候不能将这两种思维方式有机结合起来,严重影响解题效率^[5]。但是,很多学生进行数学解题的时候,没有正确理解这一几何意义,更不能合理利用,导致解题过程非常复杂。比如,学生解决有绝对值的方程 $|x-1|+|x+2|$ 的最小值时,以几何角度分析,快速获得结果,即最小值是3。但是,部分学生没有从这个角度分析,而是运用代数运算方法,非常复杂,且影响结果的准确性。如果学生解题的时候能够将绝对值的几何性质合理利用,对于问题直观地理解,解题难度救护降低。

（五）练习不足与反思不够

绝对值可以在多种题型中体现出来，可运用的解题方法也是多种多样。如果学生对于绝对值方面的题没有充足的练习，或者完成解题之后不能及时反思并予以总结，就不能掌握解题技巧并熟练应用。比如，部分学生完成一道绝对值数学题之后，没有总结规律的能力，也不能发掘适合自己的解题方法，遇到类似问题的时候感到困惑，无从下手^[6]。

二、突破绝对值解题困难的有效路径

（一）深入理解绝对值的概念以及性质

学生应首先深入理解绝对值的概念，把握其核心性质，诸如非负性以及几何意义等等，从多个角度采用多种方式加深理解。比如，通过画数轴的方式将绝对值的几何意义直观呈现，也可以采用具体例子对绝对值的性质验证，加深印象。只有对概念的本质真正理解，解题过程中才能提高灵活运用度^[7]。

比如，运用几何方法理解绝对值的概念和性质，先将数轴画出来，找到-3的点和3的点，发现两者距离原点的长度相等，都是3。如果用代数方法理解，绝对值可以体现两种性质：一种为“非负性”，即 $|a| \geq 0$ ；另一种为“对称性”，即 $|a| = |-a|$ 。绝对值的非负性，就意味着任何数的绝对值都不会是负数。对称性，意味着 a 和 $-a$ 的绝对值相等，比如， $|3| = |-3| = 3$ 。

（二）正确认识绝对值的非负性

其一，从数轴角度理解，就是数轴上的任何一个数的对应点与原点之间的距离都不会是负数，所以，绝对值不能是负值。比如，数轴上的-5点与原点之间的距离是5，可以表达为 $|-5| = 5$ 。

其二，从数的角度理解，正数的绝对值是其本身，也就是正数；负数的绝对值是其相反数，也就是正数；0的绝对值也是其本身。比如， a 是正数，绝对值表达值为 $|a| = a$ ；如果 a 是0，绝对值是其本身，即 $|a| = 0$ 。如果 a 为负数，绝对值是其相反数，即 $|a| = -a$ ，这里的 $-a$ 是正数。

（三）强化分类讨论的训练

分类讨论是解决绝对值问题的关键方法之一。学生应通过大量练习，掌握分类讨论的技巧，并培养全面、

系统的思维方式。例如，在处理绝对值方程或不等式时，可以先将变量的取值范围划分为多个区间，再分别讨论每个区间的情况，确保不遗漏任何可能性^[8]。

其一，零点分段法。这种方法就是让绝对值内部是0的 x 值。比如，针对 $|x-6| + |x-5|$ 应用零点分段法，令 $x-6=0$ ，计算出 $x=6$ ；令 $x-5=0$ ，计算出 $x=5$ 。这两个值 $x=6$ 和 $x=5$ 都是分界点，一个数轴因为这两个点的存在而被分成三段： $x < 5$ ， $5 \leq x < 6$ ， $x \geq 6$ 。

之后，对不同区间内表达式化简方式分析。当 $x < 5$ 时， $x-5 < 0$ ， $x-6 < 0$ ，按照绝对值运算规则， $|x-6| = -(x-6) = 6-x$ ， $|x-5| = -(x-5) = 5-x$ ，计算的过程中得出： $|x-6| + |x-5| = 6-x+5-x = 11-2x$ 。

当 $5 \leq x < 6$ 时， $x-6 < 0$ ， $x-5 \geq 0$ ，那么 $|x-6| = -(x-6) = 6-x$ ， $|x-5| = x-5$ ，计算的过程中得出： $|x-6| + |x-5| = 6-x+x-5 = 11$ 。

当 $x \geq 6$ 的时候， $x-6 \geq 0$ ， $x-5 \geq 0$ ，所以， $|x-6| = x-6$ ， $|x-5| = x-5$ ，计算的过程中得出： $|x-6| + |x-5| = x-6+x-5 = 2x-11$ 。

采用这种分段讨论方式，复杂的含绝对值的表达式就可以简化，后续的计算以及数据分析更加方便。

其二，符号判断法。当出现嵌套绝对值或者混合运算的时候，就要采用符号判断法对表达式逐层分析，明确其正负性，基于分析的结果决定是否需要变号。比如，对 $|m+1| + |m-2|$ 化简的时候，需要讨论三种情况。

$m < -1$ 的时候， $m+1 < 0$ ， $m-2 < 0$ ，绝对值为其相反数，即可以得出 $|m+1| = -(m+1) = -m-1$ ， $|m-2| = -(m-2) = -m+2$ ，那么 $|m+1| + |m-2| = -m-1-2-m = -2m-1 = 1-2m$ 。

当 $-1 \leq m < 2$ 的时候， $m+1 \geq 0$ ， $m-2 < 0$ ，前者绝对值为其本身，后者绝对值为其相反数，即可以得出 $|m+1| = m+1$ ， $|m-2| = -(m-2) = 2-m$ ，那么， $|m+1| + |m-2| = (m+1) + (2-m) = 3$ 。

当 $m \geq 2$ 的时候， $m+1 \geq 0$ ， $m-2 \geq 0$ ，绝对值为其本身， $|m+1| = m+1$ ， $|m-2| = m-2$ ，那么 $|m+1| + |m-2| = (m+1) + (m-2) = m+1+m-2 = 2m-1$ 。

（四）结合几何与代数思维

绝对值问题既可以从代数角度解决，也可以从几何角度理解。学生应学会合理应用这两种方法，将这两种

思维方式结合起来, 解题效率提高^[9]。比如, 在处理绝对值不等式的时候, 可采用画数轴的方法直观分析, 结合使用代数运算方法, 以实现高效解题, 且结果准确。

其一, 应用几何思维解决问题, 就是采用画数轴的方法, 找到相应的点, 得出取值范围。比如, $|x-2|$, 表示数轴上 x 的点对应的点到 2 的点之间距离。如果要解决 $|x-2|<3$ 的问题, 运用几何方法比较简单, 就是在数轴上找到与 2 的点距离小于 3 的点, 然后确定 x 的取值范围。将数轴画出来之后, 将 2 作为中心, 沿着数轴向左右延伸 3 单位, 确定 3 的点, 也就是 -1 和 5, 这就计算出 x 的取值范围, 即 $-1<x<5$ 。

其二, 应用代数模型解决问题。应用代数模型, 就是将实际问题使用绝对值表达, 这就需要学生具备一定的建模能力。比如, 让学生解决温度变化问题, 关于温差的计算可以使用绝对值完成。假设某一天的空气环境最高温度是 T_1 , 最低温度是 T_2 , 温差即为 $|T_1-T_2|$ 。这个温差属于非负数值, 所以, 这两个温度值的大小都不重要, 用 $|T_1-T_2|$ 表达, 就可以将温度变化幅度反映出来。

学生对于这种方法深入理解, 数学建模能力增强, 就可以利用绝对值解决实际问题。

(五) 加强练习与反思总结

学生应通过大量练习, 熟悉绝对值问题的各种题型和解题方法。同时, 在做题后应及时反思和总结, 提炼其中的规律和技巧。例如, 可以将常见的绝对值问题进行分类整理, 总结每类问题的解题思路和方法, 以便在遇到类似问题时能够迅速找到解决方案^[10]。

其一, 阶梯式训练。学生通过深入学习, 掌握的知识难度增加, 就要通过训练提高知识应用能力。尤其是计算综合题的时候, 所涉及的绝对值运算类型比较多, 需要采用分类讨论方法。对于多个绝对值的表达式化简之后使用, 可提高效率。比如, $|x+2|+|x-1|+|x-3|$ 中有三个绝对值, 化简的过程中, 要将三个零点确定下来, 即 $x=-2$, $x=1$, $x=3$, 画出数轴, 在上面找到这三个点, 数轴分成四段, 就可以讨论了。学生掌握这种解题方法, 逻辑思维能力提升, 运算能力得以培养。

其二, 反思与总结模板。在数学学习过程中, 记录错题是重要环节, 能够让学生发现自己的不足。将错题

记录下来, 还要分析错误原因并标注, 同时还要对解题步骤总结, 有助于学生解题思路的形成。比如, 解决 $|x-5|+|x-4|$ 最小值这个问题的时候, 确定零点 $x=4$ 和 $x=5$, 之后讨论: $x<4$ 时, 表达式化简为 $9-2x$, x 增大, 表达式的值逐渐减小; 当 $4 \leq x<5$ 时, 表达式值为 1; 当 $x \geq 5$ 时, 表达式化简为 $2x-9$, x 增大则表达式值逐渐增大。最终得出结论, $4<x<5$ 时, 表达式取最小值 1。

结语

通过研究明确, 应用错误分析方法, 能够分析学生在绝对值解题常见问题以及原因, 提出突破路径。进一步明确, 学生的绝对值解题中, 要灵活运用绝对值的概念和形式, 解题中的困难逐步克服, 解题能力提高。

参考文献

- [1] 李鼎. 含绝对值不等式问题的处理策略初探 [J]. 高中数理化, 2023, 000(19): 67-68.
- [2] 王其长. 数学思想在中学数学绝对值问题中的应用 [J]. 中学生数理化(高中版), 2023, 000(3): 5-7.
- [3] 周科春. 例谈解答含有绝对值的不等式问题的措施 [J]. 语数外学习(高中版下旬), 2023, 000(10): 49-50.
- [4] 刘丽. 解答绝对值不等式问题的三种路径 [J]. 语数外学习(高中版中旬), 2023, 000(4): 48-49.
- [5] 盘梦. 利用绝对值几何意义妙解绝对值方程 [J]. 初中生辅导, 2023, 000(1): 129-132.
- [6] 肖时芳. “化归”视角下的教学设计——以“化简含绝对值符号的代数式”的专题复习课为例 [J]. 初中数学教与学, 2023, 000(14): 22-25.
- [7] 桂慧芝, 蒋九林指导. 连珠成串——我对函数绝对值的理解 [J]. 数学通讯, 2024, 000(5): 55-57.
- [8] 龙丽萍. 初中生数学解题错误原因分析及对策研究 [J]. 数学之友, 2023, 037(11): 84-85.
- [9] 胡子洋, 徐昊天. 初中数学解题错误原因分析及对策研究 [J]. 数理天地(初中版), 2023, 000(23): 27-28.
- [10] 刘佳佳. 因考虑问题不全面而导致漏解错误与解题策略分析 [J]. 现代中学生(初中版), 2023, 000(22): 89-91.