

试析如何轻松搞定立体几何的截面问题

曾洁

湖南省永州市第四中学

摘要：高中立体几何课程历来以培养逻辑思维能力为主要目标，而新课标更加强调空间想象能力的培养，强调空间观念的建立。在高中数学中，解答立体几何截面问题常常让学生感到棘手，但其实只需掌握空间图形与平面图形的关联规律即可化繁为简。本文以人教A版教材为例，围绕“图像分解”与“逻辑推理”两个核心思路，深度解析如何将三维空间问题转化为直观的平面视角分析，帮助学生突破思维壁垒，在不依赖复杂计算的前提下精准锁定截面形态。

关键词：高中数学；立体几何；截面问题

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2025.06.214

引言

欧几里得有云：“几何无王者之道”。截面问题本质是对空间想象力的考察，许多人在面对动态切割过程时容易迷失方向。实际上，只要抓住几何体顶点、棱线间的联动规律，建立切割平面与原有结构的逻辑映射，就能像拼搭积木般逐步还原截面图形。本文从立体几何的基本构造原理出发，提出一套通用的思维框架，进而引导学生透视复杂截面问题的本质规律，以下进行相关分析。

一、截面作图的四步法

（一）确定截平面位置

在空间中确定截平面位置主要通过选定几何要素的组合约束完成，核心思路是利用点线面的匹配特性：当截平面包含三个非共线点时即可唯一确定空间位置；若出现平行或垂直约束，如要求截面与某基准面平行时，只需保持法向量同向或确定特定角度关系即可。操作中常借助几何体的对称轴或特征线作为辅助参照，例如将平面设计为同时穿过体对角线与表面交线时，可依据对称性直接推导截面方向参数；另一种典型情形是通过调整平面倾斜角使截切线满足投影比例关系，这类参数的视觉化思维直接关联截面形态演变的核心逻辑，不同方法的组合运用能有效压缩空间运算维度^[1]。

在立体几何中，确定截平面位置的关键是让学生利用几何体上的特征点、线、面建立约束关系。若已知截平面需穿过某三个不共线的点（如立方体棱的中点或顶点），只需将它们的坐标代入平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 求解参数，即可唯一确定该平面。例如，假设在边长为1的立方体中选取一条棱的中点 $M(0.5, 0, 0)$ 、对面棱的中点 $N(0, 0.5, 0)$ 以及顶面上 $P(1, 1, 0.5)$ ，将这三点坐标代入平面方程联立，可得平面 $y+z=0.5$ ，其与立方体棱的交点即可连线构成所求截面多边形。此方法通过几何要素的定位将三维切割转化为方程参数求解，直接从数学规律中提取直观图形信息^[2]。

（二）寻找交线关键点

寻找截平面与几何体交线的关键是把握空间直觉与逻辑推理的协同运作，学生观察几何体棱边与截平面的空间关系时，需要优先锁定平面可能相交的特征棱，例如与截平面存在倾斜角度的棱必然产生交点；对于内含对称轴的结构体，可通过轴对称性快速推导对称交点的对应坐标。教师在操作中可结合反向投影思维，将三维棱线投影至截面平面坐标系，利用投影参数对应关系锁定交点出现的位置范围，再通过截平面方位参数的微量调整验证交点存在的必然性^[3]。

确定立体几何截面交线关键点的核心方法是将棱的路径参数化后与平面方程联立求解。例如，在边长为2的立方体中寻找平面 $x+y+z=3$ 的交点：假设一条棱顶点坐标为 $(2, 0, 0)$ 与 $(2, 2, 0)$ ，将其表示为参数方程 $x=2, y=2t, z=0 (t \in [0, 1])$ ，代入平面方程得 $2+2t+0=3$ ，解得 $t=0.5$ 对应交点为 $(2, 1, 0)$ ；同样计算相邻棱如 $(2, 2, 0)$ 到 $(2, 2, 2)$ 的参数方程 $z=2t$ 代入得 $2+2+2t=3$ ，解得 $t=0.5$ 对应交点为 $(2, 2, 1)$ 。重复对所有棱线进行此类方程联立与范围验证，最终将有效交点连线形成完整截面形状^[4]。

（三）连接交线并验证

在立体几何的截面图形性质分析教学中，教师应着重引导学生建立多维联动分析的思维框架：首先拓展空间直觉训练，强调几何体基本构造特征与截面平面方位参数的动态关联，通过互动式几何模型操作感受截距变化引发的图形模式跃迁现象；其次细化几何约束网络，要求学生同步跟踪截面图形与原几何体的棱线交点分布规律，关注关键转折点的空间对称性特征。

连接交线的核心是将棱与平面的交点按空间相邻性顺序排列后自然形成闭合图形，关键在于验证各边连接的逻辑完整性。例如在边长为2的立方体中，若截面方程为 $x+y=2$ ，可先通过参数方程法求出各棱交点：棱AB

(顶点A[0, 0, 0]到B[2, 0, 0])代入方程得交点为(2, 0, 0), 棱BF(B到F[2, 0, 2])中参数方程 $x=2, y=0, z=2t$ 代入平面方程得 z 可任意, 因此该棱完整落在平面上, 两端点都计入交点。最终获得的六个交点需按棱的实际邻接关系依次连接成四边形和二重线段, 此时闭合成含多个环的图形需通过拓扑验证: 若连接过程中所有交点均配对产生首尾相接的线段, 且无孤立点残留即满足闭合条件, 最终截面呈现为包含长方形的组合图形。

(四) 截面图形性质分析

在立体几何截面图形性质的教学中, 关键要引导学生建立几何体构造特征与截平面空间方位的动态关联, 通过训练其对立体结构的想象能力, 观察截交线与原几何面棱边的作用规律。教学中应侧重三维与二维投影的联动分析, 启发学生通过截平面参数变化推测截面图形的边角特征, 例如调整法向量倾斜角度时推导图形对称性或闭合性变化的逻辑链条^[5]。

截面图形的类型判断需结合几何体形态与截面角度特征, 核心在于观察交点的数量规律与位置对称性。例如在正六棱柱中截平面与六个侧棱相交得到六个端点时, 若截面方程为 $z=ky (k \neq 0)$, 先通过棱的参数方程(如左前侧棱顶点 $[1, \sqrt{3}, 0]$ 到 $[1, \sqrt{3}, 4]$ 方程写作 $x=1, y=\sqrt{3}, z=4t$)代入平面方程得到 $4t=k\sqrt{3}$, 即 $t=\frac{k\sqrt{3}}{4}$ 的交点坐标 $(1, \sqrt{3}, k\sqrt{3})$, 循环六个侧棱计算后所有交点数值呈现均匀相位偏移: 坐标为 $(r\cos\theta, r\sin\theta, kr\sin\theta)$, 其中 θ 等间隔取 60° 增量, 此时轨迹参数方程蕴含坐标比例关系 $x^2+y^2=r^2, z=ky$ 揭示截面图形为轴对称图形, 若恰当转换可得该截面表现为标准椭圆方程式 $(k^2+1)y^2+x^2-2kzy=r^2$, 从而判定为椭圆形, 这是截平面倾斜切割柱体时产生的典型二次曲线特征。

二、高频题型解题技巧

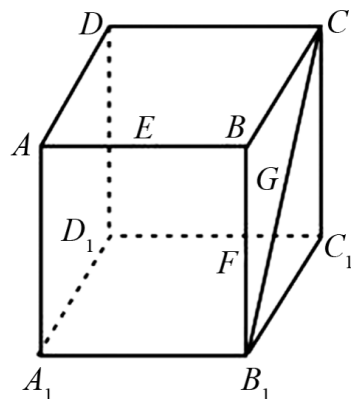
(一) 正方体 / 长方体截面问题

分析正方体或长方体的截面问题时, 重点是理解切割平面在不同位置、角度下与立体棱边的交线规律。首先抓住截面形状受切割方向控制的核心: 当平面平行于某个表面时, 截面必然与原表面结构相同; 若平面倾斜切割, 则需观察其穿过几何体平行棱线的数量和间隔规律, 此时相邻交点多形成平行四边形或三角形。对于正多边形, 需要重点验证切割平面是否满足对称条件, 例如正六边形需同时穿过三组对称棱线。在立体几何中, 截面是指用一个平面去截一个几何体(包括圆柱、圆锥、球、棱柱、棱锥、长方体、正方体等等), 得到的平面图形叫截面。其次, 我们要清楚立体图形的截面方式, 总共有三种, 分别为横截、竖截、斜截。

确定过三个顶点的截面核心是利用体对角线中点辅助定位。例如在边长为2的正方体中, 过顶点A(0, 0, 0)、顶点G(2, 2, 2)和顶点D(0, 2, 0)作截面: 首先连接AG体对角线的中点为(1, 1, 1), 发现该中点恰好在另外两条棱AD(0, 0, 0→0, 2, 0)和DG(0, 2, 0→2, 2, 2)的中心连接线上。接着通过观察其他棱与截面平面的空间关系, 如棱HG(2, 2, 0→2, 2, 2)的参数方程 $x=2, y=2, z=2t$ 代入三点坐标建立的平面方程 $x=z$, 当 $z=2t$ 时自动满足, 说明该棱全程落在平面上, 因此端点H(2, 2, 0)与G(2, 2, 2)也被计入截面多边形, 最终组合六个有效交点构成的六边形截面, 整个过程通过关键对角线中点突破常规参数计算, 建立快速空间对应连接。

解决立体几何截面问题需摒弃传统计算思维, 在扎实掌握相关理论的前提下灵活应用, 准确辨析考点实质, 防止因理解偏差导致解题失误。

有一边长为1, 位置不定的正方体容器 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 在棱AB, BB_1 及对角 B_1C 的中点各有一个小孔E, F, G, 最多能够装多少水(如图一)? 一些学生在遇到这一问题时, 往往会将问题想得过于复杂, 但仔细分析可以发现这就是一道立体图形的切面问题, 同时一些学生看到题目中给出了E, F, G这三个点, 就认为经过这E, F, G三点的截面时, 剩下部分的蓄水体积最大, 导致最终计算错误, 实际并非如此, 因为正方体的位置是可以随意放置的, 通过分析可以发现, 当经过E, B_1 , G三点的截面时, 此时蓄水的体积最大。此时, 就可以通过计算所截取的三棱锥的体积, 而后二者相减便可得到最终结果。在三棱锥 $C-E B B_1$ 中, 底面 $E B B_1$ 面积 $S=1/2 \times 1 \times 1/2=1/4$, 则三棱锥 $C-E B B_1$ 的体积 $V=1/3 \times 1/4 \times 1=1/12$, 则剩余部分的蓄水体积为 $V=1-1/12=11/12$ 。



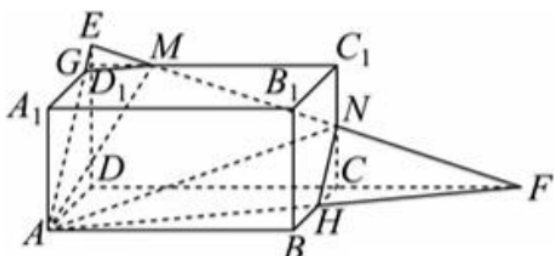
图一

(二) 长方体截面问题

解答长方体截面问题的核心思路可从整体几何特性与截面形成规律入手。长方体的空间对称性决定了截面

形状与平面切割方向的关联性——无论截面为几边形，其本质上都是平面与长方体棱相交后产生的闭合折线图形。解题时无需复杂计算，重在通过空间想象构建平面与长方体各面的相交路径：先依托长方体棱的平行性和垂直性定位切割平面的方位，再根据平面的几何特征（如倾斜角度或特定点连线）推断其与长方体各棱的交点数量及位置，最后有序连接所有可见交点形成截面轮廓。

如图二，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2AD=2AA_1$ ，点 M 是线段 C_1D_1 上靠近 D_1 的四等分点，点 N 是线段 CC_1 的中点，则平面 AMN 截该长方体所得的截面图形是几边形？这是一道判断截面形状的数学题，解答思路如下：延长 MN 交 DC 的延长线于点 F ，连接 AF 交 BC 于点 H ，连接 NH 。延长 NM 交 DD_1 的延长线于点 E ，连接 AE 交 A_1D_1 于点 G ，连接 GM 。则五边形 $AHNMG$ 为平面 AMN 截该长方体所得的截面图形。细致分析就是设 $AB=2AD=2AA_1=4$ ，又点 M 是线段 C_1D_1 上靠近 D_1 四等分点，点 N 是线段 CC_1 的中点，所以 $C_1M=3, D_1M=1, C_1N=NC=1$ ，所以 $CF=3$ ，又 CF 和 AB 平行，所以 $AB/CF=BH/CH=4/3$ ，又 $BH+CH=2$ ，所以 $CH=6/7$ 。又因为 $D_1M/DF=ED_1/ED$ ，也就是 $ED_1/2$ ，得到 $ED_1=1/3$ 。又因为 $GD_1/AD=ED_1/ED$ ，即 $GD_1/2$ ，所以 $GD_1=2/7$ ，即五边形 $AHNMG$ 为平面 AMN 截该长方体所得的截面图形。



图二

（三）棱锥与棱柱截面

处理棱锥与棱柱的截面问题时，核心在于把握二者结构特性：对于棱柱，关注其平行棱线与底面的对称关系，若截面平行于底面则为全等图形，若斜切则需根据平面贯穿平行棱线的数量组合为平行四边形或梯形，关键在于推算交线长度是否符合棱线间距的比例；对于棱锥，重点分析顶点延伸形成的轴线作用，若切割平面平行底面则形成相似缩减多边形，若平面切过侧棱则截痕边数由相交侧棱数量决定，需同步验证各侧面上交点的线性排列是否符合顶点投影规律。在实际教学中，教师需结合切割方向的几何对称性，通过预设平面倾斜角度与几何体中轴线的关系，反向推断截痕边角属性的必然规律。

棱柱棱锥中平行底面截面的本质是利用相似等差数列关系快速推导几何比例。设正四棱锥底面边长 8cm ，高 12cm ，若截面距离底面顶点 6cm 平行切割，先建立顶点投影原点 O 到底面中心的正交坐标系，取切割高度参数 $k=6$ 对应的相似比即为 $6/12=1/2$ ，此时截面图形是与底面相似的四边形且边长缩减为 $8 \times (1/2) = 4\text{cm}$ ，面积则按比例平方缩减为原底面积 64cm^2 的 $1/4$ 得到 16cm^2 。验证时可观察侧面棱 AA_1 ($O \rightarrow A$) 被截面分割的比例：当原棱长 12cm 时，切割点距顶点长度恰为 6cm ，满足线性缩放条件，此时无论顶视图还是三维投影均符合等比变形法则，避免直接求解平面方程检验过程。

三、解决截面问题的核心思路

首先，通过图像分解将三维几何体抽象为关键点、棱线及表面的组合框架，借助切割平面定位其交汇路径，从而将复杂截面拆解为不同平面图层间的交点连线问题。其次，逻辑推理需紧扣几何规律，利用空间中直线共面性、平行投影守恒性等基本原理，动态模拟切割平面的移动趋势，从对称性、延伸规律等角度推导截面轮廓的必然形态。两者结合时，分解步骤提供直观锚点，逻辑验证则通过几何定理保证结论严谨性，最终将截面问题的“碎片线索”组合成完整的平面图形，实现三维抽象思维与二维平面分析的有机统一。

结语

综上所述，想要轻松应对立体几何截面问题，需要学生先吃透空间图形的基础性质，再结合动态视角观察截面的形成规律，借助有效辅助线将抽象维度转化为可见结构，通过拆解元素间的空间关系梳理脉络，最后结合实际情况调整分析角度。教师要引导学生保持耐心，多次尝试不同切入点，逐步培养对复杂截面形态的判断直觉，学生也需要善于利用连接虚线，最终实现解题能力的自然提升。

参考文献

- [1] 刘志勇. 高中数学立体几何截面问题求解探究 [J]. 数理天地 (高中版), 2022, 13 (18): 18-19.
- [2] 方凤. 高中数学空间图形截面问题的解题策略研究 [J]. 高中数理化, 2022, 14 (23): 47-48.
- [3] 王世朋, 钱良辰, 王其. 结构视域下高三数学二轮复习课的设计与实施——以立体几何中的截面问题微专题为例 [J]. 数学通讯, 2024, 1 (06): 42-45.
- [4] 田万华, 杨媛媛, 吴幼林. 例谈 3D 技术在立体几何截面问题中的应用 [J]. 新课程研究, 2021, 2 (34): 58-59.
- [5] 殷向阳. 高中数学立体几何截面问题的求解探究 [J]. 中学教学参考, 2021, 24 (29): 27-28.