巧构等腰，妙证全等
——培养学生添加辅助线的能力

马汪舰
大连市第七十九中学

摘　要：初中阶段图形与几何领域包括“图形的性质”、“图形的变化”和“图形的坐标”三个主题。其中图形的性质强调通过实验探究、直观发现、推理论证来研究图形、理解图形。本文浅谈如何利用轴对称变化规律和变化中的不变量，培养学生用三种思路添加辅助线，构造等腰三角形为进一步证明全等三角形创造条件的能力。这样的学习过程有助于学生在具备空间观念的基础上，进一步建立几何直观，提升抽象能力和推理能力。

关键词：全等三角形；等腰三角形；初中数学；解题技巧
【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2025.07.027

引言

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》指出，希望学生感悟数学价值，能够从问题解决的过程中获得数学活动经验，产生对数学好奇心和求知欲，增强学习数学的兴趣，建立学习数学的自信心，能够在解决问题的过程中学会独立思考，合作，探究，克服困难，勇于担当的科学精神，具备一定的创新意识。本文中的例题是基于轴对称的性质和如何构造等腰三角形解决全等三角形判定问题的典型案例。体现了“立足基础、源于教材、联系实际、突出能力、强调应用、着意素养”的命题思路。

一、例题呈现

等腰三角形纸片 ABC，AB=AC，点 D 在底边 BC 上（点 D 不与点 B，C 重合），将这个纸片沿 AD 折叠，点 B 的对应点是点 E。如图 1，当△ ABC 为等边三角形时，点 M 在 AE 上，△ ADC ≌△ AMC，过点 M 作 MN ∥ DE，交 BC 于点 N，连接 CM.

①直接写出∠ DCM 的度数；

②求证：CN=DE.

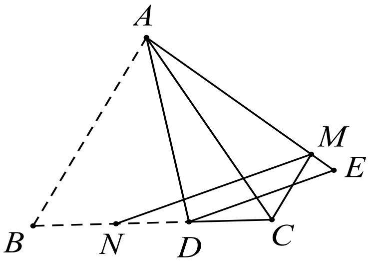

图 1

二、解题方法与评析

本题以义务教育教科书数学八年级上册第 82 页第 6 题、第 80 页例 4 为原型，兼顾知识能力、思想方法等方面的考察，以学生熟悉的形式呈现出来，符合学生认知规律。

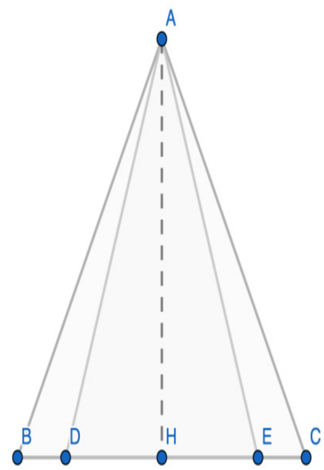

图 2

教材原型例题 1：如图 2，点 D、点 E 在△ ABC 的边 BC 上，AB=AC，AD=AE，求证 BD=CE。

该题考查等腰三角形性质，当得到 BD=CE 时，也可以得到 BE=DC。

教材原型例题 2：如图 3，△ ABC 是等边三角形，DE ∥ BC，分别交 AB、AC 于 D、E，求证△ ADE 是等边三角形。

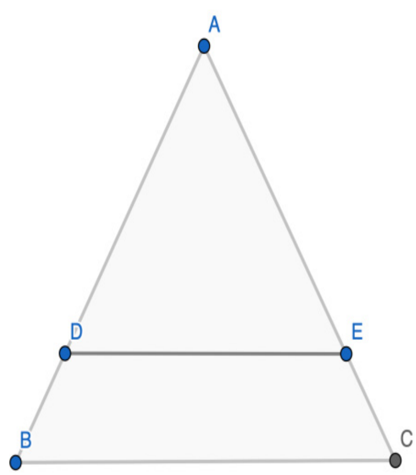

图 3

该题通过∠B=60°，DE∥BC，构造等边三角形。

本文例题与上述原题十分相似，可以通过下文思路找到解决方法，从而提升学生的数学思维能力。例题求解∠DCM=120°是较为简单的，它为证明CN=DE做好铺垫。而对于难点部分（证明CN=DE），有三类常见的解题思路。第一类思路是通过构造等边三角形，为进一步证明全等三角形从而证明线段相等创造条件；第二类思路是利用角平分线的性质为证明全等三角形创造条件；第三类为直接构造全等三角形得到相等线段。所以本题辅助线的多样性不言而喻。

第一类思路：构造等边三角形

分析观察发现，本题“将这个纸片沿AD折叠，点B的对应点是点E。”要用到轴对称的性质，得出结论∠E=∠B=60°，由于此题中∠B=∠ACD=∠ACM=∠E=60°，学生利用上述每个60°角均可构造等边三角形，为下一步得到最后结论创造条件。又由于∠BCM=120°，可得∠BCM的补角也是60°，又可以构造等边三角形。

解法1：（如图4所示，利用∠ACM=60°构造等边三角形CHM）

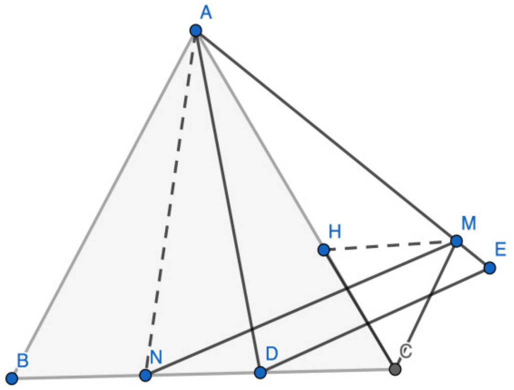

图4

在AC上取一点H，使CH=CM，连结HM、AN，

因为△ABC为等边三角形，∠B=∠ACB=60°，AB=AC，

又因为△ADC≌△AMC，∠ACB=∠ACM=60°。

因为CH=CM，所以△HCM是等边三角形，MH=MC，∠CMH=60°。

因为MN∥DE，所以∠AMN=∠E=60°。

又因为∠AMH+∠HMN=∠NMC+∠HMN，即∠AMH=∠NMC。

因为∠AHM=∠NCM=120°，HM=MC，∠AMH=∠NMC，

所以△AHM≌△NCM，AM=MN，

又因为∠AMN=∠E=60°，所以△AMN为等边三角形，所以AM=AN。

又由于△ADC≌△AMC，所以AM=AD，所以AN=AD，

所以∠AND=∠ADN，从而∠ANB=∠ADC。

又因为∠B=∠C=60°，AB=AC，所以△ABN≌△ACD。

所以BN=CD，BD=CN。

（此处也可以作等腰三角形AND底边的中线，得到BN=CD）

又因为BD=DE，所以CN=DE。

解法2：（如图5所示，利用∠ACB=60°构造等边三角形CHD）

在AC上取点H，使CH=CD，连结DH，证明△DHA≌△MCN。

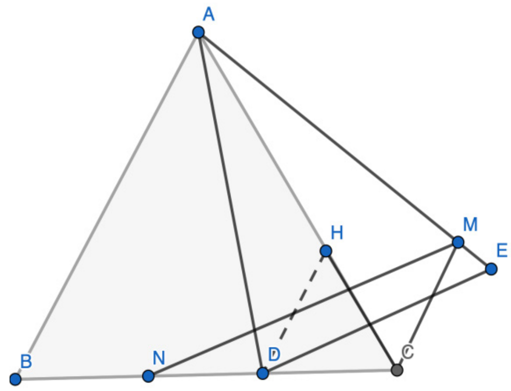

图5

解法3：（如图6所示，利用∠B=60°构造等边三角形BHD）

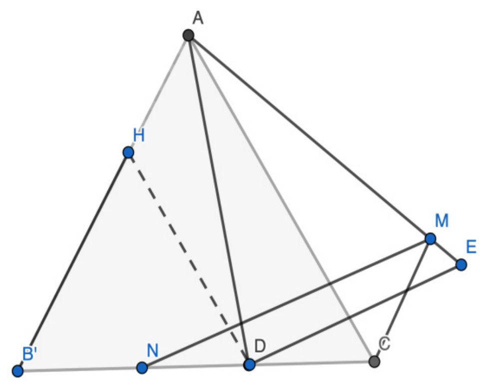

图6

在AB上取点H，使BD=BH，连结DH，证明△DHA≌△NCM。

解法4：（如图7所示，利用∠E=60°构造等边三角形EHD）

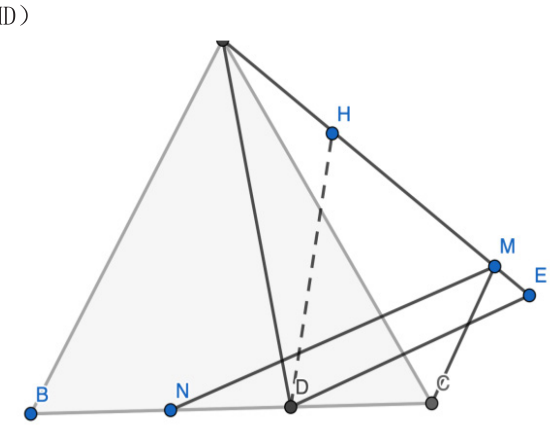

图7

在 AE 上取点 H，使 EH=ED，连结 DH，证明△ DHA ≌△ NCM。

（其他利用 60° 角构造等边三角形的方法不再赘述）

第二类思路：利用角平分线的性质

本类思路则通过“CM 是∠ BCA 的外角平分线”这一特征，利用角平分线的性质作双垂线，得到全等三角形最终解决问题。

解法 5:（如图 8 所示，利用角平分线的性质做双垂线，结合等边三角形证明全等）

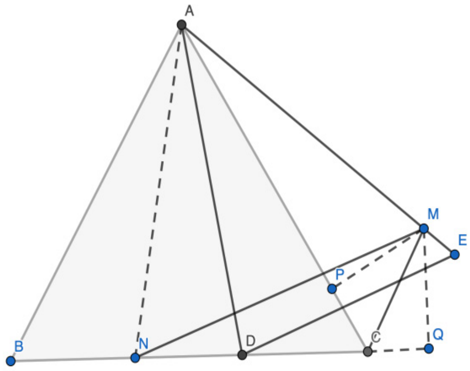

图 8

因为∠ ACM= ∠ MCQ=60° ，所以过点 M 作 MP ⊥ AC 于 P，MQ ⊥ BC 的延长线于 Q。所以 MP=MQ

由于 MN ∥ DE，所以∠ E= ∠ AMN=60° ，

由“八字图”可得∠ MAC= ∠ MNC；

可得△ AMP ≌△ NMQ

所以 AM=NM，∠ AMN=60° ，所以△ AMN 为等边三角形，

可得∠ BAN= ∠ CAM，

从而△ ABN ≌△ ACM，所以 BN=CM，

又因为 DC=CM，BN=DC，BD=NC，所以 CN=DE。

第三类思路：直接证明全等三角形

因为这个纸片沿着 AD 折叠，利用轴对性的规律得到∠ BAD= ∠ EAD，又由于△ ADC ≌△ AMC，得到∠ DAC= ∠ CAM，再利用∠ BAD= ∠ EAD，可以得到∠ DAC= ∠ CAM=20° ，∠ BAD=40° 。得到特殊角（20° 、40° ），进而得到等腰三角形，直接证明全等。

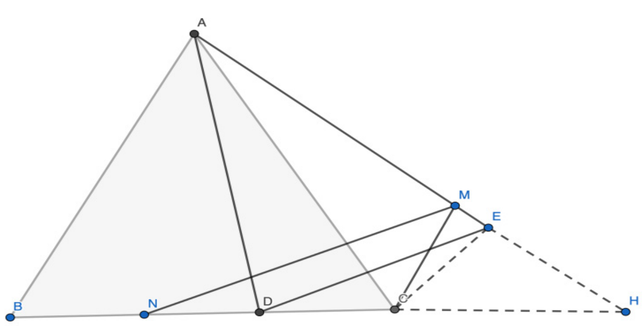

图 9

解法 6:（如图 9 所示）

延长 AE、BC 交于点 H，连结 CE，因为∠ CAD= ∠ CAM，∠ BAD= ∠ EAD，

可得∠ CAE=20° ，从而∠ CNM=20° ，∠ H=40° ，

可得△ CEH、△ CEM 和△ ACE 都是等腰三角形。

再证明△ NMC ≌△ DHE，

所以 NC=DE。

评析

轴对称是平面图形的几何变换之一，它是研究等腰三角形等很多图形性质的基础。等边三角形，是一种特殊的三角形，又与轴对称图形有关，是一种特殊的等腰三角形，它在研究几何图形方面的问题起到了重要作用。等边三角形的性质为解决全等三角形方面提供了重要条件，所以该题突出了本学段学习活动中的核心知识。通过解题思路的多样性探究，使学生具备一定的应用素质和模型意识，学会用数学语言表达与交流。

由于学生添加辅助线的经验不足，对何时需要添加辅助线、如何添加辅助线仍没有规律性了解，事实上添加辅助线本身就是一项探究性的数学活动，是获得证明所采取的一种尝试，既可能成功也可能失败。因此利用多种思路解决问题的探究方式增强了学生的自信心。

结语

本文中的例题体现了坚持素养立意、凸显育人导向、关注数学本质，关注通性通法、综合考察“四基”、“四能”与核心素养。该题以教材习题素材为原型，综合创新改造，对学生的学习活动，教师的教学活动都有很好的指导作用，通过解法探究，感悟教材原型的重要作用，帮助教师用好教材，提高学生添加辅助线的能力。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见 [EB/OL].(2014-04-08)[2022-12-12].http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/jcj_kcjcgh/201404/t20140408_167226.html.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022 年版）[EB/OL].(2014-05-09)[2025-05-16].http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/202204/W020220420582346895190.pdf.

[3] 张可心，胡典顺. 义务教育数学学业质量评价模式构建研究——基于《义务教育数学课程标准（2022 年版）》的解读 [J]. 数学教育学报,2024,33(04):6-12+33.

[4] 程明喜，王宽明. 从“数学实质”到“数学本质”——2011 年版与 2022 年版《义务教育数学课程标准》比较研究 [J]. 教育学术月刊,2023,(08):80-86.

[5] 张旭晖，易桂生，张冬梅. 指向数学本质的中学数学概念教学模式建构 [J]. 教学研究,2024,47(06):67-76.

作者简介：马汪舰（1972.06-），女，汉族，辽宁省大连市人，大连市第七十九中学高级教师，研究方向：数学。