

高中数学教材“点—线—面—体”思维进阶教学重构策略研究

何晓莲

云南省怒江州泸水市第一中学

摘要：本研究以高中数学“估算地球周长”主题为例，构建“点—线—面—体”四阶思维进阶路径，对应学生从数据测量、模型建立、空间转化到问题解决的认知发展过程。通过重构教学内容，强调化归思想实现球面到平面的降维，融入从埃拉托色尼到现代测量技术的数学文化，并设计跨学科项目以促进迁移应用。教学同步设置“观察思考—数学实验室—综合与实践”等进阶栏目，并建立四级评价体系，贯穿诊断、过程、单元与项目评价，实现“教—学—评”一致性，有效支撑数学建模与空间想象素养的落实。

关键词：思维进阶；教学重构；点—线—面—体；数学建模

【DOI】 10.12252/j.issn.2096-627X.2025.11.211

引言

当前高中数学教学面临关键矛盾：新课标强调建模与跨学科能力，但传统教材对球面几何等内容仍存在“重结论轻过程”的局限。以“估算地球周长”为例，学生因难以建立局部观测与全球结构间的逻辑关联，形成认知障碍。本研究通过重构教学内容、深化情境创设与完善评价体系，旨在突破空间转换的认知壁垒，推动数学建模素养切实落地课堂。

一、课标溯源与主题凝练

聚焦《普通高中数学课程标准》对“数学建模与数学探究”的素养要求，深入剖析“估算地球周长”案例的学科价值。该主题以“局部测量推演全球尺度”为核心认知冲突，契合课标提出的“通过数学活动理解现实世界复杂性”的目标^[2]。其思维进阶路径可凝练为四个层级：第一层级是点状认知（局部数据测量）：掌握基础几何量测算（如影子夹角、地表距离）；第二层级是线性关联（建立数学模型）：构建球体弦长与圆心角的函数关系；第三层级是面式拓展（空间关系转化）：将地面观测数据映射至地球剖面几何结构；第四层级是体化迁移（解决真实问题）：推导地球周长公式并验证跨地域适用性。

课标明确强调“发展学生空间想象与跨学科整合能力”，本主题正是通过“点→线→面→体”的思维跃迁，将抽象球面几何转化为可操作的数学实验，在解决历史经典问题（埃拉托色尼测地法）的过程中，培育数学建模与批判性思维的核心素养。从数学本质分析，“估算地球周长”的关键在于空间尺度转换：需突破欧氏几何的平面直觉，理解曲面局部特征与整体性质的辩证关

系^[3]。其核心思想方法体现在三方面，第一，化归思想：将三维球面问题降维至二维剖面（大圆）处理；第二，模型思想：用理想化几何模型（匀质球体）替代复杂现实；第三，逼近思想：通过有限测量数据无限逼近真实值。教材重构需紧扣此逻辑链条，以“实验测量、模型建构、误差分析、文化溯源”为线索，使思维进阶与认知发展规律深度契合。

二、素养目标与内容框架

基于“点—线—面—体”思维进阶路径与数学核心素养的深度关联，确立本单元素养导向的整体目标如下：

首先，从现实情境抽象空间模型：引导学生从日影观测、地表距离等局部现象中提炼关键几何量（如圆心角、弧长），建立球体剖面的数学模型，发展空间想象能力与数学抽象素养；

其次，通过数学推理构建一般规律：经历“实验测量→公式推导→误差分析”的完整过程，理解弦长公式 $C=2\pi R\theta/360^\circ$ 的数学本质，强化逻辑推理与数学运算能力；

最后，在文化溯源中深化模型认知：对比埃拉托色尼古典测地法与现代卫星测量技术，辩证认识数学模型的近似性与发展性，培育批判性思维与科学价值观^[4]。教材重构以“现象观察、模型建立、公式演绎、迁移验证”为内容主线，系统渗透核心素养发展目标：点状切入（现象观察）：通过日影夹角测量、地表距离勘测等操作活动，奠基直观想象素养；线性关联（模型建立）：将局部数据关联为球面弦长与中心角函数关系，锤炼数学建模思维；面式整合（公式演绎）：推导地球周长通用表达式 $L=360^\circ d/\theta$ ，深化数学抽象与运算能力；体化迁移（迁

移验证)：应用公式解决跨纬度周长估算问题，在误差反思中提升创新应用意识。

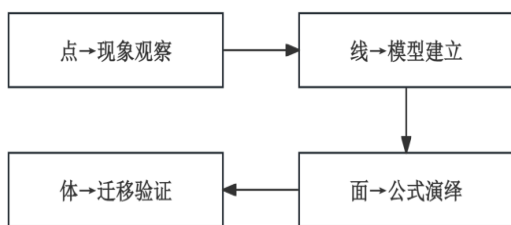


图1 四阶思维具象化

三、内容选择与组织

数学思想方法的深度渗透能强化思维进阶的整体性效能，助力学生建构跨模块的知识迁移通道。教材特设“多知道一点、化归思想的实践智慧”栏目，揭示球面问题向平面几何转化的核心思想。通过将三维地球剖面降维至二维大圆，运用圆心角 θ 与地表距离 d 的线性关系($d = R\theta$)，实现曲面与平面的辩证统一，使学生超越局部测量的局限，形成系统性空间认知。数学文化的有机融合为思维进阶注入人文底蕴，教材编排“数学文化，从埃拉托色尼到卫星测地”专题，完整呈现人类测算地球周长的认知演进，解析公元前240年埃拉托色尼利用日影夹角(7.2°)与商队行程(800km)推算地球周长的逻辑链条；对比GPS卫星测量技术中的球面三角算法，引导学生辩证认识数学模型的时代局限性与创新必然性。为体现跨学科整合的思维进阶特质，教材采用主题式项目设计：

地理融合：引入经纬度概念解释同经度异地日影差异成因，建立地理坐标与球面角的定量关系；

物理渗透：通过光学原理解析太阳平行光线与地面夹角形成的几何条件，深化对测量原理的本质理解；

工程实践：设计“跨纬度隧道长度估算”任务，要求综合应用球面三角公式与误差修正模型，锤炼创新能力^[5]。

教材内容组织的统摄性体现为紧扣“空间尺度转换”这一核心概念：宏观统领：以“局部观测→全局推演”为主线贯穿单元始终，图2呈现“点(数据采集)、线(公式建构)、面(误差分析)、体(文明演进)”的立体化内容架构：

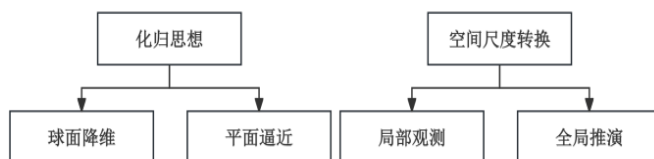


图2 立体化内容架构

微观优化：将“球面三角形逼近平面解”的化归思想贯穿各分模块三大模块，分别是基础模块(点)：日影测量操作规范与角度换算原理；核心模块(线)：弦长公式 $C = 2R\sin(\theta/2)$ 的向量法推导；拓展模块(体)：地形起伏与大气折射的误差修正模型。

四、情景创设与应用

为深化思维进阶实效，教材依托真实情境渗透数学思想方法，特设专栏再现埃拉托色尼测地法：通过埃及两城夏至日影差异测得 7.2° 圆心角，结合商队实测800公里距离，推演出地球周长40000公里的完整思维链条，使学生亲历从局部数据到全局规律的化归过程。数学文化的融合贯穿“从圭表测影到卫星遥感”专题，涵盖古典《周髀算经》中的勾股与球面几何、近代法国远征队的弧度测量与误差控制，直至现代北斗系统中的球面三角学精密应用。为强化跨学科思维，教材同步创设多项实践项目：既通过“一带一路”陆港距离优化任务融合GIS空间分析，也借助跨海隧道勘测情境引导学生构建地球曲率修正模型，同时节选《徐霞客游记》中“计里画方”法，探究古代测绘技术的几何本质。

教材情景架构以“空间尺度跃迁”为统摄核心，分层设置进阶栏目(表1)：

表1 “估算地球周长”单元栏目系统设计

思维层级	核心栏目	情景载体	活动目标
点	观察思考	日影夹角测量实验	建立圆心角与弧长的感性认知
线	做一做·议一议	同经度两地距离计算推导	发现弦长公式的几何关联
面	数学实验室	地形起伏对测量值影响的仿真	构建误差分析模型
体	综合与实践	“数字丝路”地理信息系统设计	实现球面模型跨领域迁移

单元栏目分布充分凸显了思维进阶的特征：在基础层面，设置了4个“想一想”栏目，旨在引导学生观察局部现象，例如杆影长度与太阳高度的关系；进而，在进阶层面安排了3组“做一做·议一议”活动，以此推动学生完

成从公式演绎到空间思维的跨越，例如实现从平面三角到球面三角的推广；最终，在拓展层面配置了2项“综合与实践”项目，旨在促进学生进行创新应用与整体性思考，例如探索卫星轨道参数与地表周长之间的关联验证。

五、设计评价方案

依据思维进阶层级及单元整体目标，教材构建多维立体的评价体系，贯穿“点-线-面-体”认知发展全过程，力促评价与教学、学习深度融合，实现“教-学-评”一体化。评价方案设计聚焦过程性评价与终结性评价相结合，关注知识技能掌握、核心素养发展及情感态度价值观养成，充分发挥评价的诊断、激励与导向功能。评价体系包含四个关键环节，紧密对应思维进阶层级：

（一）诊断性评价（聚焦“点”状认知）

通过“课前预评单”考察学生对基础几何概念（如圆心角、弧度制、相似三角形）的理解程度，以及利用简易工具进行实地模拟测量的操作能力；评价载体为预习问题解答与简易测量实验报告，旨在诊断局部数据测量的起点能力与空间直觉水平，为后续建模奠基。

（二）过程性评价（贯穿“线”性关联与“面”式拓展）

核心在于追踪数学建模思维链条的完整构建。设置“建模过程追踪表”，记录学生在“观察思考”环节对日影现象与地理数据的关联分析，在“做一做·议一议”环节对球面弦长公式的推导逻辑，以及在“数学实验室”中对误差来源的识别与修正策略探讨；特别关注从局部测量数据抽象出数学模型的关键步骤，以及将二维平面关系拓展至三维球面空间认知的转化能力；评价形式包含课堂观察记录、小组研讨贡献度、阶段性推导报告及误差分析日志。

（三）单元终结评价（整合“面”式理解与“体”化迁移）

依托单元“小结与评价”栏目系统实施。“知识图谱”环节要求学生绘制体现“点-线-面-体”进阶路径的本单元知识结构图，清晰标注局部测量、模型建立、公式推导、误差分析及跨学科应用的逻辑关联，评价其对本单元知识全貌与内在联系的把握程度；“思考回顾”环节以结构化问题链引导学生系统梳理从埃拉托色尼经典方法到现代技术的演进逻辑，反思空间尺度转换的核心思想；“注意事项”环节通过辨析关键概念及典型错误案例，强化对球面几何本质与模型局限性的深度认知；“自评互评”环节构成评价闭环：“自评”聚焦知识技能掌握度及建模、推理、空间想象等核心素养达成度；“互评”侧重评价合作探究中的科学态度、批判性思维表现，以及对方绘制的知识导图所体现的系统性思维与创新性。评价载体包含单元知识结构图、反思总结报告、自评互评量表及单元测验。

（四）项目应用评价（驱动“体”化迁移）

通过“综合与实践”项目进行综合评价。考察学生

综合运用球面几何模型、误差修正方法及跨学科知识解决复杂真实问题的能力；重点评价其模型迁移的有效性、方案设计的创新性、计算过程的严谨性以及 against 结果实际意义的阐释深度；评价形式为项目解决方案报告、模型验证数据及成果答辩表现。

该评价方案通过诊断摸底、过程追踪、单元整合、项目迁移的四维联动，全面映射学生从局部现象感知到全局规律推演，从单一技能掌握到综合素养养成的思维进阶轨迹；其核心价值在于通过多元评价形式引导学生深度反思学习过程，优化认知结构，养成严谨求实的科学态度与勇于探索的创新精神，同时为教师精准把握学情、动态调整教学策略提供实证依据，切实发挥评价促进学生可持续发展和引领教学方式变革的育人导向作用。

结语

“点-线-面-体”思维进阶框架重构了“估算地球周长”的教学基因。其实践价值不仅体现于破解球面几何认知困境，更在于构建了素养导向的教学范式。以化归思想为脉络，将埃拉托色尼测地法中的 7.2° 圆心角与800公里弧长关联，演绎为可操作的“日影测量、公式推导、误差修正、卫星技术对比”认知链条，使抽象空间关系象为可触达的思维阶梯。通过经纬度坐标解析、隧道工程勘测等跨学科任务设计，证实球面三角模型在解决实际问题中的迁移能力，呼应课标“数学与生活世界互联”的核心诉求。四级评价体系将碎片化知识点（如弧度制换算）纳入从局部到全局的认知图谱，使自评互评聚焦空间转换素养，单元测验锚固建模思想，项目答辩验证迁移创新，最终实现“教-学-评”闭环运行。

参考文献

- [1] 戴晓畴, 马晨辰, 马利伟, 等. 基于STEAM教育理念的数学建模教学活动研究[J]. 创新教育研究, 2024, 12(7): 163-168.
 - [2] 谢爱华. 学科融合的数学建模活动案例[J]. 数理天地: 高中版, 2023(5): 47-49.
 - [3] 潘小明. 数学课堂教学中大概念, 大问题的运用研究[J]. 中小学教师培训, 2023(3): 49-54.
 - [4] 吕世虎, 文尚平. 指向“学-教-评”一体化的数学课堂教学设计: 内涵阐释与操作路向[J]. 当代教育与文化, 2025, 17(1): 55-63.
 - [5] 傅海伦, 臧丽君, 王晓慧. 基于生态课堂的数学拓展式教学策略研究[J]. 教学与管理, 2023(27): 92-95.
- 作者简介: 何晓莲(1993—10), 女, 白族, 云南丽江人, 本科学历, 研究方向为高中数学教学研究。