以 GGB 演示为桥梁，探索手拉手模型之美

肖梦妍[1] 谭敏[1] 张邦[2]

1. 湖南科技大学 数学与统计学院；2. 湘潭钢铁集团有限公司第一子弟中学

摘 要：针对当前中考数学中的几何问题，本文以手拉手模型为例，创新性运用 GGB 开展教学实践，为数学教师展现了信息化教学模式。通过详实的 GGB 操作指南与教学设计实例，助力一线教师突破“手拉手模型”教学难点，也为其他几何模型的数字化教学提供参考。

关键词：手拉手模型；GGB；数学

【DOI】10.12252/j.issn.2096-627X.2025.12.085

引言

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》在核心素养的主要表现及内涵中，要求初中学生初步感知数学建模的基本过程，明确指出要培养“模型意识”[1]。我国数学家徐利治也认为数学是研究模型的学科[2]。过去模型教学依赖板书或简易教具，复杂几何变换几乎没办法进行直观展示，因此我们考虑引入数字化工具优化教学。

可视化软件 GeoGebra（以下简称 GGB）使用界面简洁直观，可通过两种方式绘图。一方面，用户可在指令栏输入指令，经历数字符号向几何图形的跃迁；另一方面，解析图形中几何元素的关系后，用户可以通过工具栏进行作图。GGB 不仅能精准绘制静态图形，还能实现几何图形的实时变换；既能辅助教师进行动态演示，又支持学生课外进行自主探究。其融入几何模型教学，是实现信息化教育的现实需要，也是突破传统模型教学、落实核心素养目标的有效路径。

一、基本情况分析

解构近些年的中考经典几何题，不难发现一个清晰的命题范式。命题者通常以一些几何模型为基本单元，通过模型组合、条件转化等方式进行命题。这种命题形式本质上是对学生识别模型、迁移应用能力的考查。既精准对接新课标对核心素养的培养要求，又通过变式考查了学生的思维。

（一）手拉手模型介绍

手拉手模型是初中数学经典模型之一，一般是由两个顶角相等且共顶点的三角形组成的图形。其核心特征为：共顶点、顶角相等、旋转对称。对应点相连的两条边，可以形象地看作两双手互相拉住，所以称为手拉手模型，常与动点问题结合出题。模型解题应从图形本质出发，根据不同条件，综合运用知识进行论证，避免机械套用结论。

（二）模型教学的难点

学习模型，才能理解模型，进而破解模型。在专题教学中，教师可以引导学生将所学内容整理归纳出类型和对应方法，经过加工提炼，匹配出有指导价值、有典型结构的几何模型[3]。像手拉手模型这样，以模型为背景的几何综合题，考查学生识别基本图形、应用图形性质的能力，同时也考查学生的逻辑推理能力、几何直观等数学学科素养[4]。在一些难题中，模型不一定能直观看出，需要经过辨析。在复杂图形中分辨出基本图形，是几何教学中提高学生分析和解决问题能力的重要一环[5]。为了提高学生对手拉手模型的熟悉度，教师在教学中可利用 GGB 辅助教学。现在 GGB 越来越多地出现在数学教学活动中，为数学教学活动多元化提供有效支撑，展现出它独特的优势[6]。合理运用 GGB 可增强直观感受，优化教学设计，提高课堂教学质量，提升学生的思维能力，培养数学核心素养[7]。

（三）学情分析

初三学生已学习过全等、相似三角形，建构了相关的认知结构，能感知基本的图形变换。在此基础上，研究手拉手模型。对于简单题，他们能借助概念得出答案；但面对一些较复杂的问题时，常常无从下笔。归根结底，还是因为学生不会多角度思考问题，习惯孤立看待图形元素。在面对几何元素繁杂的难题时，他们很难找到思路。这时，模型教学的优势就显露了出来。

通过研究手拉手模型，归纳其性质和规律，学生面对同一类模型问题时，能更高效地寻找图形中的关键信息，提升解题能力。面对稍难的问题时，学生需要教师更多的引导启发，将复杂问题转化为熟悉的模型，提高效率。这也正是学习模型解题的魅力所在。

（四）“手拉手模型”研究方向

手拉手模型，一般从寻找“不变性质”、研究“临界点”、分析“具体条件”这几个方向来进行研究。无论题目怎么变化，只要满足模型基础特征，便可直接得到不变结论。在手拉手模型动点问题中，求最值是极为常见的问题。

大量典例表明，最值通常出现在临界点位置。一般来讲，临界点往往在题目设定的具体条件下出现。分析题目条件，本质上就是在对临界点进行深入探究。面对上述这些问题，教师在讲解时，可以利用 GGB 进行动态演示，帮助学生理解动态过程，弄清模型本质。下面本文将通过例题，展示如何利用 GGB 进行可视化教学。

二、教学案例

（一）经典例题，感知模型

问题 1　△ ABC 是边长为 5 的等边三角形，△ DCE 是边长为 3 的等边三角形，直线 BD 与直线 AE 交于点 F，如图 1，若点 D 在△ ABC 内，∠ DBC=20°，则∠ BAF=_______；现将△ DCF 绕点 C 旋转 1 周，在这个过程中，线段 AF 长度的最小值是________。

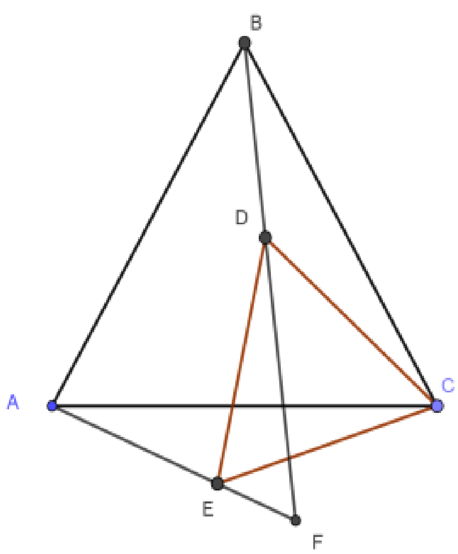

图 1

这道题是手拉手模型和动点问题结合的典型。在问题 1 中，△ ABC 与△ DEC 共顶点 C，△ DCE 绕点 C 旋转 1 周，连结 BD、AE，两者延长线交于点 F，符合手拉手模型特征。学生审题，感受“手拉手”过程。因而可由模型直接得结论：△ BDC ≌△ AEC。故∠ EAC=∠ DBC=20°，第一空可得答案∠ BAF=∠ BAC+∠ EAC=80°。

设计说明：选择典型例题，从研究方向出发，引导学生审题，分析图形，抽离出隐藏的手拉手模型。匹配模型之后，可直接得出推论。再深入审题，明确需要探究的具体任务，聚焦最值，直接或间接求解。

（二）典例精析，抽丝剥茧

下面以问题 1 为例，继续探究。点 D 是等边三角形 CDE 的顶点，随整个三角形旋转而改变位置，但题目规定了 DC=3，故点 D 可看作在以点 C 为圆心，3 为半径的圆上运动，点 E 同理。点 F 由 BD、AE 延长相交而得，故点 F 的位置由点 D、点 E 决定（通常称点 D、E 为“主动点”，点 F 为“随动点”）。可继续借助模型推论∠ AFB=∠ ACB=60°，A、B、C、F 四点在同一个圆上。明析了题目本质后，在 GGB 中，采取以下操作：

（1）构造边长为 5 的等边△ ABC，以点 C 为圆心，绘制半径为 3 的圆，且以点 C 为顶点，作边长为 3 的等边△ DCE。

（2）创建角度滑动条α（范围$0-2\pi$），选择 CD、CE 旋转α°，得到 D’、E’并连结。

（3）构造直线 BD、AE 交于点 F。此时可通过 GGB 验证四点共圆。选中点 F，右击显示轨迹，跟踪点 F 的轨迹，易证 A、B、C、F 四点在同一个圆上。

设计说明：审题后，明确图形本质，知道图形各个元素之间的关联，知道手拉手模型推论在本题中的具体表现，此时利用 GGB 开始构造图形。在构造中思考，在思考中明悟。

（三）软件演示，追根溯源

拖动滑动条改变参数α，观察线段变化。前面已经说明过 A、B、C、F 四点共圆，在 GGB 中表示出圆。想要求解 AF 的最小值，即弦 AB 最小，此时∠ FBA 最小，换言之，∠ FBC 最大。在三角形旋转过程中，当 CD ⊥ BF 时，∠ FBC 最大，即 BF 是$\odot C$的切线。

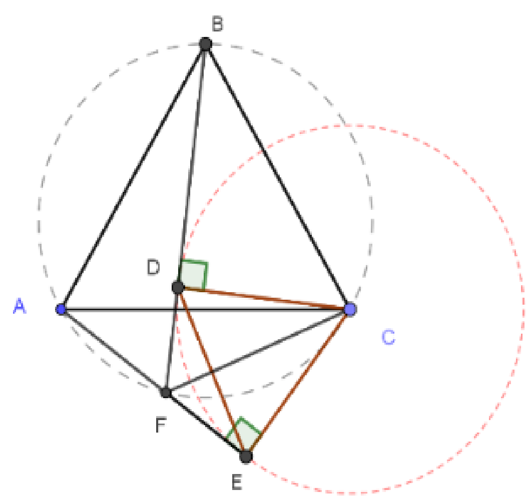

图 2

设计说明：自由调整旋转角度，观察长度变化。动态演示趣味十足，学习氛围积极和谐，学生课堂参与度提高。由结论入手，步步反推，明确临界点。GGB 作为一个数学工具，有力地提供了现实支持。

（四）模型应用，彰显实效

问题 1：见图 2，此时在$Rt\triangle BCD$, 中$BC=5, CD=3$,

$\therefore BD=\sqrt{5^2-3^2}=4$，$\therefore AE=BD=4$

$\therefore \angle FDE = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\because \angle AFB = 60^\circ, \therefore \angle FDE = \angle FED = 30^\circ$,

所以$FD = FE$

过点F作$FG \perp DE$于点G, $\therefore DG = GE = \dfrac{3}{2}, \therefore FE =$

$DF = \dfrac{DG}{\cos 30^\circ} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AF = AE - FE = 4 - \sqrt{3}$

设计说明：通过 GGB 演示，学生直观感知，观察图形的动态变化，能迅速抓住解题关键点，通过模型转换条件，寻找等量进行代换，将已知条件重新整合进行关联，从而解决问题。在借助 GGB 探索的过程中，学生逐步掌握高效的解题方法，提升数学思维与解题能力。

三、教学反思

（一）模型教学优势多

手拉手模型应用不仅限于三角形相关问题，一些性质推论对于多边形同样适用，还可与其他知识结合进行考察，培养知识迁移能力。在解题教学中，教师要教会学生用数学的思维思考问题，从条件、结论和图形等方面进行分析，关注题目中的显性条件，挖掘隐含条件，大胆进行思维关联与尝试构造，构建几何模型，生成多样的解题思路，形成解题策略[8]。开展手拉手模型专题教学具有不可忽视的教学价值。在模型教学中，教师能对学生学习情况和应用能力进行评估，及时调整、优化教学，确保教学活动契合学生的学习需求。

在本节课解决较为复杂的几何证明题时，部分学生还是表现出一定的问题。他们只会机械套用结论，没有思考模型的本质。例如，在需要进行连续推理时，有些学生不能准确地找到解题的切入点，或者出现逻辑漏洞。这说明学生对模型有初步的认识，但在深度理解和熟练运用方面还有待加强，培养模型观念任重道远。

（二）可视教学真理显

GGB 能精准呈现动态效果，当学生直观看到图形随动点变化时，原本模糊的想象变得直观清晰，他们才能明白问题求解关键，临界点出现在什么情况下。这也有助于节省课堂时间，提升效率。除了手拉手模型外，像将军饮马、瓜豆原理等都是高频率考察模型。GGB 能够帮助学生在动态变化中观察和总结这些模型的特点。在演示过程中，改变点的位置、角度等参数，学生反复观察不同情况下几何量之间的关系，对于模型的构建和应用理解也愈发深刻。

然而，使用 GGB 教学难免存在一些问题。比如，部分学生可能会被演示效果所吸引，过度关注变化的表象，却忽略了背后的数学本质，舍本逐末；在课堂上，演示时间有限，一些学生可能来不及深入思考，就进入了下一个教学环节。针对这些问题，在今后的教学中，教师要更加注重引导学生，在欣赏动态效果的同时深入挖掘其中蕴含的数学内涵，合理安排课堂环节，预留足够的思考时间，确保学生能跟上教学进度。

结语

本节课从学生真实学情出发，立足中学生认知发展规律，聚焦几何模型教学困境，创新性借助 GGB 进行动态演示，突破教学困境。相较于传统模型教学，数字化教学更为轻松愉悦，学生积极活跃参与课堂，在“数”与“形”的转化中不断迸发新的思维火花。教师要结合课程内容与学生的真实需要，合理运用 GGB 的各项功能，让学生在信息技术的助力下感受数学魅力，提升解决问题的能力，落实核心素养目标。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准（2022 年版）[M]．北京：北京师范大学出版社，2022.

[2] 高炎．渗透模型思想，助力学生发展模型观念 [J]．数理天地（初中版），2025，(03)：106-108.

[3] 何贻勇，罗静，贺婷．基于项目化学习的几何模型教学研究——以“瓜豆模型探究活动”教学为例 [J]．初中数学教与学，2025，(02)：32-35.

[4] 唐红萍．高观点视域下的以“手拉手模型”为例的中考专题复习策略 [J]．试题与研究，2024，(15)：16-18.

[5] 王海，虞秀云，谭广勇．繁中求简　凸显本质——以全等三角形中“手拉手模型”的提炼与应用为例 [J]．初中数学教与学，2018，(09)：34-36.

[6] 周春燕，王静，吴小涛，毛雅茜．GeoGebra 软件在中学数学教学中的应用探究 [J]．数学学习与研究，2022(35)：14-16.

[7] 徐阳．技术点亮数学　课堂生成素养——GeoGebra 助力初中数学高效教学 [J]．理科考试研究，2023，30(22)：28-31.

[8] 段文洁，李加禄．挖掘条件构造模型优化思路——一道中考题的解法探究及解题启示 [J]．初中数学教与学，2024，(03)：43-45.

基金项目：本文系湖南省学位与研究生教学改革研究项目《有限元方法虚拟教研室架构与内容建设的探索研究》（课题编号：2024JGYB196）；《思政视域下数值分析课程线上线下混合式教学的实践探索与研究》（课题编号：HNJG-2022-0774）的阶段性成果。