

余数可以是0吗

王小军

(江西省九江市双峰小学 江西 九江 332000)

【摘要】有人说数学教学是一门思辨的艺术，严密的推理、逻辑的论证、精确的计算、步步为营的思维方式，总能让人体会数学的无穷魅力！最近，我们数学组就经历了一场这样的头脑风暴。引发思考的导火索是一道填空题：在 $() \div 6 = 4 \cdots ()$ 中，第二个括号最小能填 $()$ ，则第一个括号里填 $()$ 。“第二个括号最小能填几”其实就是“余数最小是几”，这个问题在同组老师中引起了争议，有人说“余数最小是1”，有人说“余数最小是0”，孰是孰非？笔者那股“刨根问底”的劲头儿上来了，决定抱着科学严谨的态度，多方论证，一探究竟。

【关键词】余数；教参解读；个人思考；专家论道

1. 一线之声

余数可以是0吗？——笔者很想知道一线教师怎样看待这一问题，于是随机“采访”了几位老师。

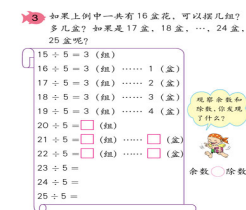
师1：什么叫有余数的除法？平均分后，没有完全分完，剩下的就是余数，如果完全分完了，应该是没有余数了，所以我认为有余数的除法应该不包括完全分完的这种情况，所以余数不可能有0。

师2：首先如果0是余数，那整数的除法都是有余数的除法了，就不存在没有余数的除法，这与我们平时的说法不一致。

师3：任何除法都有余数，当然0也是余数，在有些版本的教材中有提示，余数0可以不写。

2. 教材之说

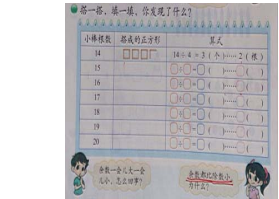
教师们的说法各有各的道理，可究竟孰是孰非，我也不敢妄下结论，决定借助教材来寻找答案。笔者找到了两种使用较广的不同版本小学数学教材。不同版本教材对“余数”这部分内容相关章节的呈现，以及《教师用书》中关于教材的解读，引发了笔者的一些思考。



【人教实验版三上P52】 【新人教版二下P61】

【教参解读】与实验教材相比，新版的主题图在编排上发生了很大的变化，新版教材通过用小棒摆正方形的操作活动，让学生通过观察、比较、分析、发现余数和除数之间的关系 [余数 < 除数]，随后的“做一做”题目设计巧妙，没有给出小棒的总根数，而是让学生运用余数和除数的关系解决问题，使学生明确：最小的余数是1，最大的余数比除数小1，从而加深学生对余数和除数关系的理解。

【个人思考】对比新老人教版的教材，虽然在探究余数和除数关系时编排理念上有很大变化，但正文部分都没有直接给出余数相关结论和余数可能是几的明确答复，给人的感觉是“犹抱琵琶半遮面”。但从教参的解读，依稀能感觉编者还是更加倾向“余数不可以为0”这一观点。



【北师大3版二下P4】 【北师大4版二下P4】

【教参解读】第3版的教材P4通过四道题的练习，让学生比较每道题的余数和除数，自主探索并发现余数与除数之间的关系。第4版的教材P4结合搭正方形的活动，为学生理解余数和除数的关系提供了形象化的支撑。整个活动完成之后，再观察填写表格，进而自然引导学生总结出余数和除数的关系。

【个人思考】在第4版教参中有这样的几段话引起了我的注意：“另外在P13 又说“需要说明的是，在上面的探索活动中，为了呈现操作过程的原始记录，学生需要填写余数为0的算式，但是在平时进行除法运算时，余数为0可以不写”。教参中首次出现“余数为0”这一关键词，对比第3版教参，从“教学时教师要让学生认识到分剩下的数就是余数”→“本单元‘有余数的除法’都是指‘有剩余的除法’，即余数不为0的除法”→“为了呈现操作过程的原始记录，学生需要填写余数为0的算式”。第4版教参没有回避“余数可以是0”这一话题，我想编者一定不会在这块内容随意进行修改，肯定也是经过了一番考证和审慎地思考，觉得余数为0还是有道理的，应该是有意而为之。

3. 专家论道

在数学课本上找不到“余数可以为0”的论述，教参中又没有形成统一观点，而确在词典中找到了“余数不可以为0”的证据，所以就不难理解很多老师都坚持认为余数不能为0了，事实果真如此吗？毕竟词典只能代表一家之言，我还是决定找找关于这方面的专业书籍并求证有关专家，在那里找寻到我想要的答案。

首先在网上找到了特级教师牛献礼关于余数一段论述，他说“为什么有人提出0是余数吗”的质疑呢？如把‘没有剩余的除法’说成‘没有余数的除法’，‘把有剩余的除法’说成‘有余数的除法’。这种把除法分成有或没有余数的描述，导致了认知冲突：既然没有余数，怎么又冒出余数是0呢？”，他的这段话给了我很大的启示。

接着笔者在网上搜集到了很多关于余数的一些专家论文，其中有一篇是江西南昌肖鉴铿教授撰写的，题目是《浅谈在整数除法中余数可以为零》，里面有这样的一段论述：“事实上，‘余数为0’的提法早已被数学界认可。看来‘余数为0’的说法是有据可查的。

一道习题引发诸多思考，一道习题带领我们经历了一场数学的思辨之旅，在这场与一线老师、教材论著、专家学者酣畅淋漓的对话中，我们收获的不仅仅是对“余数可以是0吗”这一问题的认识，更是对待数学问题钻研较真的态度和科学严谨的治学方法。我愿与我的同仁们一起在数学教学研究的路上共同碰撞、共同思辨、共同成长……

参考文献

[1]荆亚琴, 潘小福.有余数除法中, 余数可以为0吗[J].教育视界, 2018(08): 78-79.

本论文系江西省教育科学“十三五”规划省级课题项目“基于小学生数学学习力发展的关键课教学案例研究”(18ZXBYB080)阶段性成果