

利用几何画板和maple解百鸡问题

李 灿

(湖北省十堰市竹山县竹坪乡中心小学 湖北 十堰 442220)

[摘要] 百鸡问题是中国传统数学中有一个著名的问题。它可以用人工方法来解,这里主要探讨它的机器解法。我们可以使用几何画板和 maple 这两个软件来解这个题。本文重点介绍了两种方法,一种是把两个软件结合起来用,另一种是只用 maple。

[关键词] 百鸡问题,人工解法,几何画板, maple

在中国传统数学中有一个著名的百鸡问题,源于《张邱建算经》,原文中说:“今有鸡翁一,值钱伍;鸡母一,值钱三;鸡雏三,值钱一。凡百钱买鸡百只,问鸡翁、母、雏各几何?”这段话翻译成白话文就是:公鸡一只5钱、母鸡一只3钱,小鸡一钱3只,一百个铜钱买了一百只鸡,问公鸡、母鸡、小鸡各多少只?

原书中只有答案而没有解题过程。中学数学中喜欢那这个题作为思考题让学有余力的学生去做,尤其寒暑假作业喜欢拿这个题作为阅读材料。在没有数学软件之前,老师和学生遇到这个题,如果要做出,就得靠人工推理、计算。过程如下:

设公鸡有 x 只,母鸡有 y 只,小鸡有 z 只,可以列出下面的方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=100 & ① \\ 5x+3y+\frac{z}{3}=100 & ② \end{cases}$$

$$② \times 3 - ① \text{得}$$

$$14x+8y=200$$

$$y=25-\frac{7x}{4}$$

在这里, y 是正整数,那么 $25-\frac{7x}{4}$ 也是正整数,于是 $\frac{7x}{4}$ 也必然是正整数,也就是说 x 必须是 4 的倍数。又因为 x 也是正整数,那么 x 的最小值是 4。

y 是正数,也就是说 $25-\frac{7x}{4} > 0, x < \frac{100}{7}$ 。 x 取整数, $x \leq 14$ 。

于是,我们知道 $4 \leq x \leq 14$ 。而 x 必须是 4 的倍数,那么在这个范围内 x 只可能是 4、8、12。我们把这三个数分别代入 $y=25-\frac{7x}{4}$ 和 $z=100-x-y$, 就可以得出相应的 y 和 z 。符合条件的结果是 (1) $x=4, y=18, z=78$; (2) $x=8, y=11, z=81$; (3) $x=12, y=4, z=84$ 。

那么,正确的答案是这三种情况:(1) 公鸡 4 只,母鸡 18 只,小鸡 78 只;(2) 公鸡 8 只,母鸡 11 只,小鸡 81 只;(3) 公鸡 12 只,母鸡 4 只,小鸡 84 只。

我们可以发现,用人工方法做这个题的确很繁琐,如果能够借助数学软件来代替人工推理计算就比较方便了。

下面我们就来探讨如何用几何画板和 maple 两种数学软件来解这个题。

联合使用 maple 和几何画板。

我们其实可以只使用几何画板,因为列出方程组后,我们是可以通过人工推理把 y 和 z 用 x 表达出来的。这里为了省去人工推理,也可以借助 maple。

先打开 maple, 执行代码和显示如下:

$>\text{solve}(\{x+y+z=100, 5*x+3*y+z/3=100\}, \{y, z\})$ (只把 y 和 z 看成未知数来解这个方程组,用含有 x 的代数式表示 y 和 z)¹

$$\{y=-\frac{7}{4}x+25, z=\frac{3}{4}x+75\}$$

这时我们再打开几何画板,先分别单击“数据——新建函数”,新建两个函数 $f(x)=-\frac{7 \cdot x}{4}+25$ 和 $g(x)=\frac{3 \cdot x}{4}+75$ 。然后构

壹 “>”是我们单击maple的工具栏“在光标后插入maple命令符”,然后第一行自动显示的提示,并非人工输入的符号,下同。括号中的解释文字是原maple文件中没有的,这里方便大家理解才在本文中添上去的,下同。

造参数 $n=0$, 再分别单击“数据——计算”, 得出 $n+1, f(n+1)$

和 $g(n+1)$ 的值。($n+1$ 的精确度可以设置成单位即只保留整数, $f(n+1)$ 和 $g(n+1)$ 的精确度可以设置成百分之一即保留两位小数)。选择 n 的标签, 单击“变换——迭代”, 建立从 n 到 $n+1$ 的迭代。连续单击小键盘上的 + 增加迭代, 直到 $f(n+1)$ 的值为负数时按 - 减少迭代并单击“确定”完成迭代。我们在迭代后形成的表格中发现, 大部分 $f(n+1)$ 和 $g(n+1)$ 的值小数部分不是 0, 不符合要求。小数部分是 0 的只有 $n+1=4$ 时, $f(n+1)=18.00$, $g(n+1)=78.00$; $n+1=8$ 时, $f(n+1)=11.00$, $g(n+1)=81.00$; $n+1=12$ 时, $f(n+1)=4.00$, $g(n+1)=84.00$ 。其实, 这里小数部分是 0 的几个数就是整数, 是符合条件的数。我们如果实在不放心, 可以就几何画板中的函数标签和自带的计算器进行检验。

也就是说, 得出的答案和前面的人工方法一样:(1) 公鸡 4 只, 母鸡 18 只, 小鸡 78 只;(2) 公鸡 8 只, 母鸡 11 只, 小鸡 81 只;(3) 公鸡 12 只, 母鸡 4 只, 小鸡 84 只。

只使用 maple。

打开 maple, 执行代码和显示如下:

$>\text{isolve}(\{x+y+z=100, 5*x+3*y+z/3=100\});$

$\{x=-100+4_ZL, y=200-7_ZL, z=3_ZL\}$ (isolve 理论上讲就是求方程正整数解的一个函数, 但它给出的结果往往是带参数的, 并不是最后的结果。这里的 $_ZL$ 就是一个参数, 可以用整数代替)

$\text{seq}(\text{subs}(\{x=-100+4_ZL, y=200-7_ZL, z=3_ZL\}, _ZL=26..29);$ (显然, 当 $_ZL$ 为 25 时, $x=0, x$ 要大于 0, $_ZL$ 的最小值就有可能是 26; 当 $_ZL$ 为 30 时, $y=-10, y$ 要大于 0, $_ZL$ 的最大值就有可能是 30)

$\{x=4, y=18, z=78\}, \{x=8, y=11, z=81\}, \{x=12, y=4, z=84\}, \{x=16, y=-3, z=87\}$ ^贰

在这四组解中, 最后一组 y 是负数应舍去, 那么只有前三组解符合要求。

用这种方法得出的答案依然是:(1) 公鸡 4 只, 母鸡 18 只, 小鸡 78 只;(2) 公鸡 8 只, 母鸡 11 只, 小鸡 81 只;(3) 公鸡 12 只, 母鸡 4 只, 小鸡 84 只。

小结

在今天的中小学数学中, 我们解题用的是人工方法, 而大学的数学建模一般会采用数学软件。就百鸡问题而言, 人工解法确实有些繁琐。本文列举的两种方法中, 前者运用了在几何画板中构造数列的思想, 后者直接运用 maple 中求整数解函数的方法。两种方法都需要筛选, 各有优劣。maple 和几何画板相比, 它可以直接将方程的变形在软件中进行, 这一点几何画板是做不到的。相信在未来的数学教学中, 这些数学软件能够广泛普及, 那样我们的数学也许就不会像现在这样枯燥复杂了。

参考文献

【1】陈琳:《现代教育技术》, 高等教育出版社, 2006 年 7 月第 1 版。

【2】陈翔:《〈几何画板〉软件在数学教学中的应用》,《大家教育周刊》, 2013 年第 22-23 期。

【3】李士奇:《计算机代数与数论》,《重庆教育学院学报》, 2002 年 5 月第 15 卷第 3 期。

贰 前三组解中的下划线可以在原maple中加上, 方法同在word中类似, 但下次再打开时下划线不显示。