

# 多元函数最值问题的求解方法

崔文霞

(数理与统计学院 上海工程技术大学 上海 201620)

**[摘要]** 多元函数的最值问题, 一直都是高等数学课程的重要组成部分, 不仅是高等数学教学的重点, 同时也是此门课程必修的重要知识点。多元函数的最值问题一般涉及多元函数的极值和边界值的大小, 解题方法也比较灵活多变。因此, 要求学生在掌握极值求解方法的同时, 还要会求解所需的边界最值。本文基于例子对多元函数最值问题的解题方法进行探讨和总结。

**[关键词]** 多元函数; 极值; 拉格朗日 (Lagrange) 乘数法; 代入法

## 引言

在工农业生产、科学实验及工程技术中, 常常会遇到这样一类问题: 在一定条件下, 怎样使“用料最省”、“产品最多”、“效率最高”和“成本最低”等问题, 这类问题在数学上有时可归纳为求某一函数 (通常称为目标函数) 的最大值或最小值问题<sup>[1]</sup>。对于一般的最值问题实际就是求解极值问题, 函数的自变量除了限制在函数的定义域内以外, 并无其他条件, 即无条件极值。但在实际问题中, 常常会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题。若多元函数在有界闭区域上连续, 则此多元函数在此区域必定能取得最大值和最小值。这种使函数取得最大值或最小值的点可能在区域的内部 (或可能的极值点), 也可能在区域的边界上。例如, 设有一圆板占有平面闭区域为  $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 4\}$ , 该圆板被加热, 以致在点  $(x,y)$  的温度是  $T=2x^2+y^2-2x$  (C), 求该圆板的最热点和最冷点。即  $T$  的自变量  $x, y$  还必须满足附加条件  $x^2+y^2 \leq 4$ 。

## 1 代入法

先求目标函数的驻点及目标函数在驻点处的取值, 再求解边界上的最大值和最小值, 最后比较这些值, 哪个最大就是最大值, 哪个最小就是最小值。

在平面区域  $x^2+y^2 < 4$  上, 先解方程组 
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 4x-2=0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 2y=0 \end{cases}$$
, 求得驻点

$(0.5, 0)$ , 则  $T_1 = T|_{(0.5, 0)} = -0.5$  C; (1)

在边界  $x^2+y^2=4$  上, 将  $y^2=4-x^2$  代入  $T=2x^2+y^2-2x$  得  $T=(x-1)^2+3$ 。

当  $x=-2$  时, 有边界上的最大值  $T_2=12$  C;

当  $x=1$  时, 有边界上的最小值  $T_3=3$  C, 比较  $T_1, T_2$  及  $T_3$  的值知, 最热点在点  $(-2, 0)$ ,  $T_{\max}=12$  C, 最冷点在点  $(0.5, 0)$ ,  $T_{\min}=-0.5$  C。

## 2 拉格朗日 (Lagrange) 乘数法

多元函数在有界闭区域上求解最值, 利用拉格朗日 (Lagrange) 乘数法进行求解。设辅助函数  $L(x, y, \lambda)$  为

$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$  对  $L(x, y, \lambda)$  求解关于  $x, y, \lambda$  的偏导数, 可得

$$\begin{cases} L_x = 4x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

解 (2) 式可得

$$\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda=-1 \\ x=1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} \lambda=0 \\ x=0.5 \\ y=0 \end{cases}, \text{ 即得 5 个点分别为 } (0.5, 0), (\pm 2, 0) \text{ 和}$$

$(1 \pm \sqrt{3}, 0)$ , 比较这 5 个点得函数值可得最热点为  $(-2, 0)$ , 最冷点为  $(0.5, 0)$ 。

## 3 参数法

利用参数  $k(0 \leq k \leq 4)$  构造拉格朗日 (Lagrange) 函数进行求解。设辅助函数  $F(x, y, \lambda)$  为

$F(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - k)$  对  $F(x, y, \lambda)$  求解关于  $x, y, \lambda$  的偏导数, 可得

$$\begin{cases} F_x = 4x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - k = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

解 (3) 式可得

$$\begin{cases} y=0 \\ x=\pm\sqrt{k} \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda=-1 \\ x=1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} \lambda=0 \\ x=0.5 \\ y=0 \end{cases}, \text{ 即得 5 个点分别为 } (0.5, 0),$$

$(\pm\sqrt{k}, 0)$  和  $(1, \pm\sqrt{k-1})(1 \leq k \leq 4)$ , 把这 5 个点代入目标函数  $T=2x^2+y^2-2x$  得

$$T|_{(0.5, 0)} = (2x^2 + y^2 - 2x)|_{(0.5, 0)} = -0.5,$$

$$\begin{aligned} T|_{(\sqrt{k}, 0)} &= (2x^2 + y^2 - 2x)|_{(\sqrt{k}, 0)} & T|_{(-\sqrt{k}, 0)} &= (2x^2 + y^2 - 2x)|_{(-\sqrt{k}, 0)} \\ &= (2k - 2\sqrt{k}), & & = (2k + 2\sqrt{k}), \end{aligned}$$

$$T|_{(1, \pm\sqrt{k-1})} = (2x^2 + y^2 - 2x)|_{(1, \pm\sqrt{k-1})} = (k-1), (1 \leq k \leq 4)$$

在以上三式中试代  $k$  ( $1 \leq k \leq 4$ ) 的值可得  $k=4$  最热点是  $(-2, 0)$ , 最冷点为  $(0.5, 0)$ 。

注: 求解多元函数的最值问题, 首选方法 1, 而利用方法 2 或方法 3 解决一些题目是不可行的<sup>[2]</sup>。例如, 求二元函数  $z = f(x, y) = x^2y(4-x-y)$  在由直线  $x+y=6$ ,  $x$  轴和  $y$  轴所围成的闭区域  $D$  上的最大值与最小值。

## 参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学第六版 (下册) [M]. 高等教育出版社, 2016.  
[2] 梁宗巨. 多元函数的最大值与最小值 [J]. 数学通报, 1965(10):41-45.